Теорема о 4-красках, шестимерные многообразия и комбинаторика фуллеренов

В. М. Бухштабер

МИАН имени В. А. Стеклова,
МГУ имени М. В. Ломоносова,
ИППИ имени А. А. Харкевича

XVI Летняя школа «Современная математика»
Ратмино, июль 2016 г.

Темы и результаты

1. Проблема 4-красок. Постановка проблемы, её история и результаты.
2. Конструкция, сопоставляющая гладкое шестимерное многообразие $M(P)$ каждому простому трёхмерному многограннику P, грани которого раскрашены в 4 цвета.
3. Проблема классификации односвязных гладких шестимерных многообразий с точностью до диффеоморфизма.
4. Фуллерены — широкий специальный класс простых трёхмерных многогранников, результаты о комбинаторике которых имеют нетривиальные приложения в квантовой химии, квантовой физике и нанотехнологиях.
5. Теорема. Два фуллерена P_1 и P_2 комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует диффеоморфизм многообразий $M(P_1)$ и $M(P_2)$.

Литература 1

- V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric Topology.*, Mathematical Surveys and Monographs, v. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015; 518 pp.
- С. П. Новиков, И. А. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля.*, МЦНМО, Москва, 2005, 580 стр.
- Г. М. Циглер, *Теория многогранников.*, Перевод с английского под редакцией Н.П.Долбилина, МЦНМО, Москва, 2014, 419 стр.
- В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, Т. Е. Панов *Алгебра и комбинаторика выпуклых многогранников.*, Приложение к книге Г.Циглера “Теория многогранников”, МЦНМО, Москва, 2014, 420–518, 553–556.

Литература 2

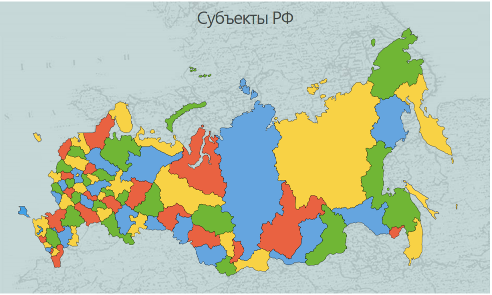
- Э. Э. Лорд, Ф. Л. Маккей, С. Ранганатан, *Новая геометрия для новых материалов*, пер. с англ. Л. П. Мезенцевой под ред. В. Я. Шевченко, В. Е. Дмитриенко, М., Физматлит, 2010, 264 с.
- Е. А. Кац, *Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры*, М., ЛИБРОКОМ, 2014. 296 с.

Лекция I

1. Теорема о четырех красках.
2. Трехмерные выпуклые многогранники.
3. Двойственность Гейла.
4. Момент-угол многообразия.
5. Квазиторические многообразия.
6. Приложение теоремы о четырех красках.
7. Фуллерены.

Правильная раскраска карты

- Картой области на плоскости будем называть разбиение области на подобласти, каждая из которых имеет ненулевую площадь.
- Раскраска карты называется правильной, если любые две области, имеющие границу ненулевой длины, раскрашены в разные цвета.



Карта на сфере

Картой на двумерной сфере будем называть разбиение ее поверхности на области, каждая из которых имеет ненулевую площадь.

Решение проблемы правильной раскраски любой области на плоскости в k цветов дает решение аналогичной проблемы на двумерной сфере.

Задачи

Задача

Дана карта на сфере. Найдите условие, при котором ее можно правильно раскрасить в три цвета.

Задача*

Докажите, что любую карту на сфере можно правильно раскрасить в пять цветов.

Проблема четырех красок

Теорема

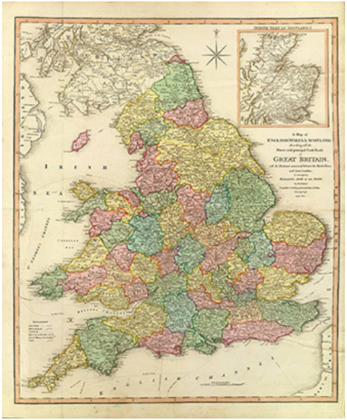
Любую карту на плоскости можно правильно раскрасить в четыре цвета.

Следствие

Любую карту на двумерной сфере можно правильно раскрасить в четыре цвета.

История проблемы

Теорема о четырех красках была впервые сформулирована 23 октября 1852 года математиком и ботаником Франциском Гутри (Francis Guthrie), который заметил, что ему удалось раскрасить карту графств Англии только в четыре цвета так, что никакие два графства, имеющие общий отрезок границы, не были раскрашены в один цвет.



История проблемы

Проблема четырех красок получила широкое признание в 1878 году, когда знаменитый английский математик Артур Кейли (Arthur Cayley) выступил на заседании Лондонского математического общества с докладом, в котором он заявил, что ему не удалось ее решить.

В 1976 году математики Кеннет Аппель (Kenneth Appel) и Вольфганг Хакен (Wolfgang Haken) доказали теорему о четырёх красках.

Результаты

Это была первая крупная проблема в математике, доказательство которой существенно использовало компьютер. На первом шаге авторы, используя логические рассуждения, доказали, что теорема верна для всех карт, если она верна для конкретного конечного набора карт.

Набор включал в себя 1936 случая! Для раскраски этого набора карт и был использован компьютер.

Часть информации и иллюстрации на этих слайдах взяты с сайта Математических Этюдов:
`http://www.etudes.ru/ru/sketches/#iarea`.

Выпуклым трёхмерным многогранником называется ограниченное множество вида

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon a_i x + b_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\}$$

Будем считать, что такое описание неприводимо, т. е. удаление любого неравенства изменяет множество P. В этом случае каждая гиперплоскость $\mathcal{H}_i = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon a_i x + b_i = 0\}$ определяет двумерную грань $F_i = P \cap \mathcal{H}_i$.

Мы будем отождествлять комбинаторно эквивалентные многогранники.

Формула Эйлера

Пусть f_0 — число вершин, f_1 — число рёбер и f_2 — число двумерных граней трёхмерного многогранника. Тогда имеет место формула Эйлера (1707–1783)

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2$$

Задача

Доказать формулу Эйлера, используя формулу включения-исключения:

$$\chi(W_1 \cup W_2) = \chi(W_1) + \chi(W_2) - \chi(W_1 \cap W_2),$$

где $\chi(W) = f_0(W) - f_1(W) + f_2(W)$.

Реализация f-вектора

Теорема (Штейниц, 1906 г.)

Целочисленный вектор (f_0, f_1, f_2) является вектором граней трехмерного многогранника тогда и только тогда, когда

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2, \quad f_2 \leqslant 2f_0 - 4, \quad f_0 \leqslant 2f_2 - 4$$

Следствие

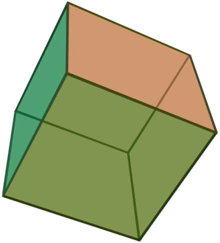
$$f_2 + 4 \leqslant 2f_0 \leqslant 4f_2 - 8$$

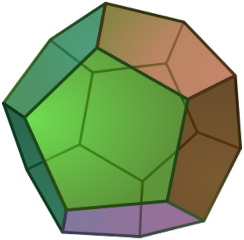
Для многогранников размерности 4 до сих пор неизвестны условия, характеризующие вектор (f_0, f_1, f_2, f_3) его граней.

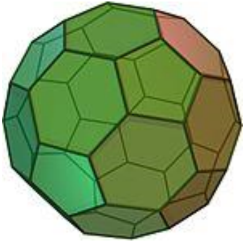
Простые многогранники

Определение

Трёхмерный многогранник называется **простым**, если каждая его вершина простая, то есть в ней сходится ровно три ребра.







Из 5 Платоновых тел 3 простых.
Из 13 Архимедовых тел 7 простых.

Следствия формулы Эйлера для простых мн-ков

Пусть p_k — число k-угольных граней многогранника.

Следствие формулы Эйлера

Для любого простого многогранника P выполняется соотношение между числами k-угольников

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k\geqslant 7}(k-6)p_k$$

Следствие

Если $p_k = 0$ для $k \neq 5, 6$, то $p_5 = 12$.
Не существует простого многогранника только с шестиугольными гранями.

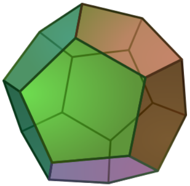
$$f_0 = 2(\sum_k p_k - 2) \quad f_1 = 3(\sum_k p_k - 2) \quad f_2 = \sum_k p_k \Longrightarrow f_0 = 2(f_2 - 2)$$

Диаграммы Шлегеля (Виктор Шлегель, 1843–1905)

Определение

Диаграммой Шлегеля (1886) выпуклого трёхмерного многогранника P называется его проекция на плоскость выбранной двумерной грани из точки вне многогранника, близкой к этой грани. Диаграмма зависит от выбора грани.

- Диаграмма Шлегеля представляет собой разбиение выбранной грани на многоугольники.
- Граф рёбер на диаграмме является полным комбинаторным инвариантом многогранника P.



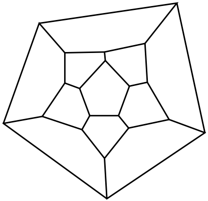


Диаграмма Шлегеля додекаэдра

Двойственность Гейла

Набор векторов в $\mathbb{R}^n$ имеет ранг r, если порожденное ими линейное подпространство имеет размерность r.

Определение

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^3$ набор ранга 3 и $\mathcal{G} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subset \mathbb{R}^{m-3}$ набор ранга $m-3$. Запишем набор $\mathcal{A}$ в виде $(3 \times m)$-матрицы A и набор $\mathcal{G}$ в виде $((m-3) \times m)$-матрицы Γ.

Наборы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{G}$ называются двойственными по Гейлу, если $\Gamma A^\top = 0$.

Двойственность Гейла

Пример

Наборы $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, -(e_1 + e_2 + e_3)\} \subset \mathbb{R}^3$ и $\mathcal{G} = \{1, 1, 1, 1\} \subset \mathbb{R}^1$ двойственные по Гейлу, где e_1, e_2, e_3 – вектора стандартного базиса.

Задача

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{G}$ наборы, двойственные по Гейлу. Описать, с какой точностью матрицы A и Γ определяют друг друга.

От многогранников к квадрикам

Рассмотрим многогранник

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_i x + b_i \geqslant 0, \ i = 1, \dots, m\}.$$

Выберем набор $\mathcal{G} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \subset \mathbb{R}^{m-3}$, двойственный по Гейлу набору $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}^3$ и положим

$$\mathcal{Z}_P = \{z \in \mathbb{C}^m \ : \ \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk} |z_k|^2 = \delta_j, \ j = 1, \dots, m-3\}$$

где $\delta = \Gamma b$.
Пересечение эрмитовых квадрик $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ эквивариантно относительно стандартного действия на $\mathbb{C}^m$ стандартного тора

$$\mathbb{T}^m = \{z \in \mathbb{C}^m \ : \ |z_k|^2 = 1, \ k = 1, \dots, m\}.$$

От многогранников к квадрикам

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \;:\; a_i x + b_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m\};$$

$$\mathcal{Z}_P = \{z \in \mathbb{C}^m \;:\; \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}|z_k|^2 = \delta_j,\ j = 1, \dots, m-3\}.$$

Теорема

$\mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^m = P$. Эквивариантное вложение $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ задает вложение

$$j_P \;:\; P \subset \mathbb{R}^m_{\geqslant};\ j_P(x) = (y_1, \dots, y_m),$$

где $y_i = a_i x + b_i$.

Момент-угол многообразием простого многогранника $P \subset \mathbb{R}^3$ будем называть многообразие $\mathcal{Z}_P$.

Теорема

Следующие условия эквивалентны:

1. Многогранник P является простым.
2. Пересечение квадрик $\mathcal{Z}_P$ является гладким многообразием размерности $m+3$.
3. Вложение $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ имеет $\mathbb{T}^m$-эквивариантное тривиальное нормальное расслоение, $\mathbb{T}^m$-оснащение которого задается матрицей Γ.

Момент-угол многообразия

Теорема

Представление простого многогранника

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_i x + b_i \geqslant 0, \ i = 1, \dots, m\}$$

задает момент-угол многообразие

$$\mathcal{Z}_P = \{z \in \mathbb{C}^m \ : \ \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}|z_k|^2 = \delta_j, \ j = 1, \dots, m-3\}$$

однозначно с точностью до линейного изоморфизма пространства $\mathbb{R}^n$, где набор $\mathcal{G} = \{\gamma_j\}$ является двойственным по Гейлу набору $\mathcal{A} = \{a_i\}$.
Пересечение квадрик $\mathcal{Z}_P$ задает представление простого многогранника P однозначно с точностью до линейного изоморфизма пространства $\mathbb{R}^3$.

Структура момент-угол многообразия

1. Проекция $\pi_{\mathcal{Z}}\colon \mathcal{Z}_P \to P = \mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^m$ обладает каноническим сечением
$$s_{\mathcal{Z}}\colon P \to \mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m,\ s_{\mathcal{Z}}(x) = (z_1, \dots, z_m),$$
где $z_k = \sqrt{a_k x + b_k}$.
2. Отображение
$$f_{\mathcal{Z}}\colon P \times \mathbb{T}^m \to \mathcal{Z}_P \ :\ f_{\mathcal{Z}}(x,t) = t s_{\mathcal{Z}}(x)$$
является эквивариантным и разлагается в композицию с гомеоморфизмом
$$P \times \mathbb{T}^m/_{\sim} \to \mathcal{Z}_P,$$
где $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x$ и $t_1 s_{\mathcal{Z}}(x) = t_2 s_{\mathcal{Z}}(x)$.

В случае

$$P = \Delta^3 = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\ -(x_1 + x_2 + x_3) + 1 \geqslant 0\}$$

мы получаем:

$$\mathcal{Z}_P = \{z \in \mathbb{C}^4\ :\ \sum_{k=1}^{4} |z_k|^2 = 1\} = S^7.$$

Задача

Описать гомеоморфизм $\Delta^3 \times \mathbb{T}^4/_\sim \to S^7$.

Задача

Для любого простого трехмерного многогранника P диагональная окружность $S^1 = \{(z, \dots, z) \in \mathbb{T}^m\}$ действует свободно на многообразии $\mathcal{Z}_P$.

Следствие

Имеет место гладкое многообразие $P\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}P^{m-1}$.

Задача

Доказать, что для любого простого трехмерного многогранника P существует каноническое гладкое многообразие W_P такое, что $\partial W_P = \mathcal{Z}_P$.

Структура момент-угол многообразия

Рассмотрим куб

$$I^3 = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_i \geqslant 0,\ -x_i + 1 \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3\}.$$

Задача

Описать многообразие $\mathcal{Z}_{I^3} \subset \mathbb{C}^6$.

Задача

Описать гомеоморфизм $I^3 \times \mathbb{T}^6/_\sim \to \mathcal{Z}_{I^3}$.

Комбинаторные данные

Комбинаторные квазиторические данные (P, Λ) состоят из:

- ориентированного простого многогранника P;
- целочисленной $(3 \times m)$-матрицы Λ, определяющей так называемое характеристическое отображение

$$\ell\colon \{F_1, \ldots, F_m\} \to \mathbb{Z}^3$$

такое, что для каждой вершины $v = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$ столбцы

$$\lambda_{i_1} = \ell(F_{i_1}),\ \lambda_{i_2} = \ell(F_{i_2}),\ \lambda_{i_3} = \ell(F_{i_3})$$

матрицы Λ образуют базис группы $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$.

Квазиторические многообразия

Пусть дано характеристическое отображение

$$\ell\colon \{F_1, \ldots, F_m\} \to \mathbb{Z}^3.$$

Без ограничения общности можно считать что

$$F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \emptyset,\ \Lambda = (I_3, \Lambda_*),$$

где I_3 — единичная матрица. Тогда матрица $S = (-\Lambda, I_{m-3})$ задает $(m-3)$-мерную подгруппу

$$K(\Lambda) = \{(e^{2\pi i\psi_1}, \ldots, e^{2\pi i\psi_m}) \in \mathbb{T}^m\},\ i = \sqrt{-1},$$

где

$$\psi_k = -\sum_{j=4}^{m} \lambda_{k,j}\varphi_j,\ k = 1, 2, 3,\ \psi_{3+k} = \varphi_k,\ k = 1, \ldots, m-3.$$

Квазиторические многообразия

Лемма

Группа $K(\Lambda)$ действует свободно на $(m+3)$-мерном многообразии $\mathcal{Z}_P$.

Определение

Квазиторическим многообразием $M = M(P, \Lambda)$ будем называть пространство орбит $\mathcal{Z}_P / K(\Lambda)$.

Это 6-мерное гладкое многообразие с гладким действием 3-мерного тора $T^3 = \mathbb{T}^m / K(\Lambda)$.

Задача

Описать матрицы Λ_{Δ^3} и Λ_{I^3}, задающие характеристические отображения для симплекса Δ^3 и куба I^3.

Задача

Описать квазиторические многообразия $M(P, \Lambda_P)$ для $P = \Delta^3$ и I^3.

Структура квазиторического многообразия

Имеет место последовательность отображений

$$\pi = \pi_2 \cdot \pi_1 \colon \mathcal{Z}_P \to M(P, \Lambda) \to P,$$

где π_1 является эквивариантным относительно проекции $\mathbb{T}^m \to T^3$. Проекция π_2 обладает сечением $s_2 = \pi_1 s_{\mathcal{Z}}$.

Следствие

Имеет место непрерывное T^3-эквивариантное отображение

$$f_2 \colon P \times T^3 \to M(P, \Lambda) \ : \ f_2(x, t) = t s_2(x),$$

которое задает гомеоморфизм

$$P \times T^3/_\sim \to M(P, \Lambda),$$

где $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x$ и $t_1 s_2(x) = t_2 s_2(x)$.

Приложение теоремы о четырех красках

Пусть P — некоторый простой трехмерный многогранник. Граница ∂P гомеоморфна сфере S^2 разбитой на многогранники $F_1, \ldots, F_m$, т.е. задает карту.
Из условия простоты многогранника следует, что если $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, то $F_i \cap F_j$ является ребром. Следовательно, при любой правильной раскраске карты ∂P и любой вершины $v_k = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$ грани $F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}$ раскрашены в различные цвета.

Приложение теоремы о четырех красках

Согласно теореме о четырех красках, существует правильная раскраска карты ∂P, т.е. функция

$$\varphi\colon \{F_1, \ldots, F_m\} \to \{1, 2, 3, 4\}.$$

Возьмем набор $E = \{e_k \mid k = 1, ..., 4\}$ векторов, где e_k при $k = 1, 2, 3$ представляет собой стандартный вектор решетки $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ и $e_4 = e_1 + e_2 + e_3$.
Любые 3 вектора из набора E образуют базис в $\mathbb{Z}^3$.

Следствие

Для любого простого трехмерного многогранника P функция

$$\ell\colon \{F_1, \ldots, F_m\} \to \mathbb{Z}^3$$

такая, что $\ell(F_i) = e_{\varphi(F_i)}$, является характеристическим отображением многогранника P.

Приложение теоремы о четырех красках

Теорема

Любой простой трехмерный многогранник P имеет характеристическую функцию, и, следовательно, у него имеется квазиторическое шестимерное многообразие $M^6 = M(P, \Lambda)$.

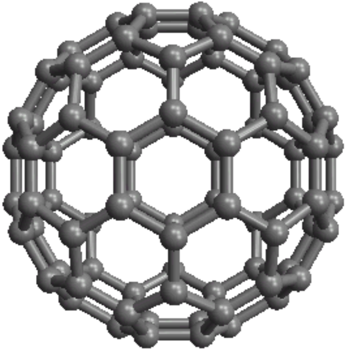
Задача

Докажите, что в любом наборе $\{e_1, \ldots, e_5\} \subset \mathbb{Z}^3$ существуют три вектора $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}$, которые *не образуют* базис в $\mathbb{Z}^3$.

Фуллерены

Фуллереном называется молекула углерода, которая топологически имеет форму сферы и каждый атом которой принадлежит ровно трём углеродным кольцам, состоящим из пяти и шести атомов.

Фуллерен C_{60}



Фуллерен C_{80}

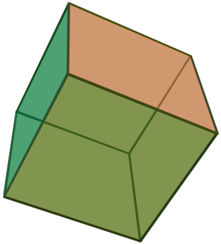
Бакминстерфуллерен C_{60} был открыт химиками-теоретиками Робертом Кёрлом, Гарольдом Крото и Ричардом Смолли в 1985 (Нобелевская премия 1996 года по химии «за открытие фуллеренов»).

Биосфера Фуллера
Павильон США, Экспо-67
Монреаль, Канада

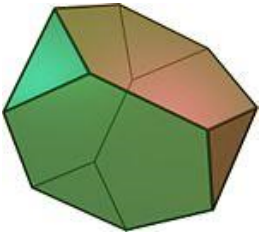
Фуллерены были названы в честь Ричарда Бакминстера Фуллера (1895-1983) — известного американкого архитектора и философа.
В 1954 году он запатентовал архитектурную конструкцию в форме многогранного купола для перекрытия больших площадей.

Определение

Простой многогранник называется флаговым, если любой его набор попарно пересекающихся гиперграней $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$: $F_{i_s} \cap F_{i_t} \neq \varnothing$, $s, t = 1, \ldots, k$, имеет непустое пересечение $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \varnothing$.



Флаговый многогранник



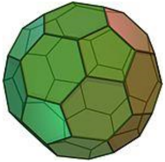
Нефлаговый многогранник

Фуллерены

Определение

(Математическим) фуллереном называется простой трёхмерный многогранник, у которого все двумерные грани являются пятиугольниками или шестиугольниками.

Фуллерен C_{60}



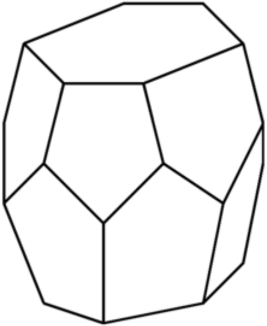
Усечённый икосаэдр

Для любого фуллерена $p_5 = 12$,

$$f_0 = 2(10 + p_6), \quad f_1 = 3(10 + p_6), \quad f_2 = (10 + p_6) + 2$$

Существуют фуллерены с любым значением $p_6 \neq 1$.

Диаграммы Шлегеля фуллеренов



Фуллерен «бочка»

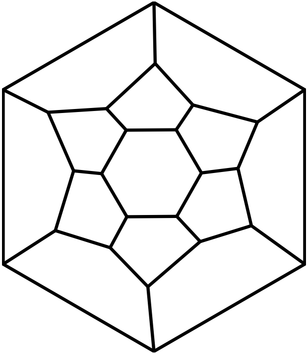
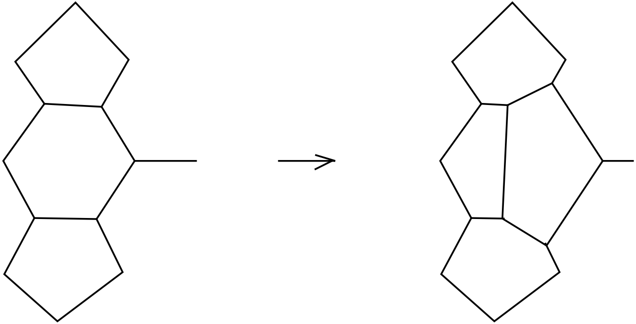


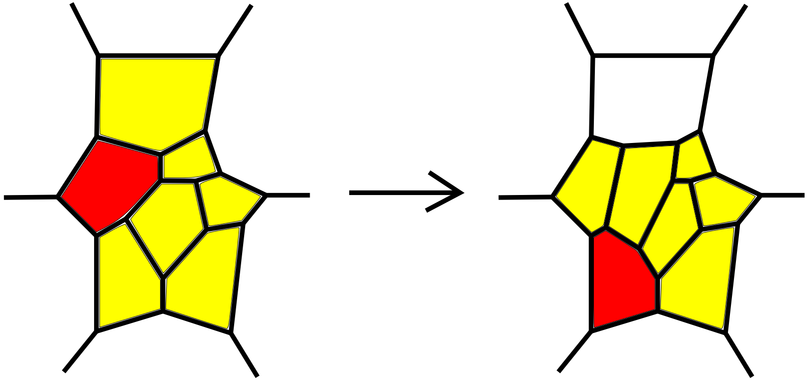
Диаграмма Шлегеля «бочки»

Операция Эндо-Крото



- Операция Эндо-Крото увеличивает число p_6 на 1.

Фрагмент для бесконечной серии операций Эндо-Крото



- Операция Эндо-Крото превращает фрагмент слева во фрагмент с такой же границей, состоящий из предыдущего фрагмента и дополнительного (белого) шестиугольника.

Число комбинаторных типов фуллеренов

Комбинаторно неэквивалентные фуллерены с одинаковым числом p_6 называются комбинаторными изомерами.

Пусть $F(p_6)$ – число комбинаторных изомеров с данным p_6. Известно, что $F(p_6) = O(p_6^9)$.

Имеется эффективный алгоритм перечисления комбинаторных типов фуллеренов при помощи суперкомпьютера (Бринкман, Дресс, 1997).

Следующая информация взята из источника
House of Graphs, Fullerenes (http://hog.grinvin.org/Fullerenes)

p_6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	75
$F(p_6)$	1	0	1	1	2	3	6	6	15	...	46.088.157

Определение

IPR-фуллереном (Isolated Pentagon Rule) называется фуллерен, у которого нет смежных пятиугольников.

- Пусть P – IPR-фуллерен. Тогда $p_6 \geqslant 20$.
- IPR-фуллерен с $p_6 = 20$ комбинаторно эквивалентен бакминстерфуллерену C_{60}.

Число $F_{IPR}(p_6)$ комбинаторных изомеров IPR-фуллеренов как функция от p_6.

p_6	20	21	22	23	24	25	26	27	28	...	97
F_{IPR}	1	0	0	0	0	1	1	1	2	...	36.173.081

Гипотеза Бринкмана-Дресса, 1997

Гипотеза (Бринкман, Дресс)

Функции $F(p_6)$ и $F_{IPR}(p_6 + 24)$ в некотором смысле являются хорошими асимптотическими приближениями друг друга.

p_6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	73
$F(p_6)$	1	0	1	1	2	3	6	6	15	...	36.798.433
$F_{IPR}(p_6 + 24)$	0	1	1	1	2	5	7	9	24	...	36.173.081

Теорема

- Каждому фуллерену P соответствует момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ размерности $(15 + P_6)$ с действием стандартного тора $\mathbb{T}^N$, где $N = 12 + P_6$.
- Каждой раскраске Λ карты ∂P, где P – фуллерен, соответствует шестимерное квазиторическое многообразие $M(P, \Lambda)$.

Темы лекции II

- Комбинаторные свойства многогранников, отличающие фуллерен от произвольного трехмерного многогранника;
- Алгебраические и алгебротопологические методы описания комбинаторики многогранников;
- Результаты, дающие алгебротопологические критерии комбинаторной эквивалентности фуллеренов;
- Результаты, дающие алгебротопологические критерии диффеоморфности гладких односвязных шестимерных многообразий.