Упражнения и задачи
по курсу «Покрытия арифметическими прогрессиями».

Часть 1

Определение 1. Через $a(m)$ мы обозначаем множество всех целых x таких, что $x \equiv a \pmod m$ (то есть арифметическую прогрессию с разностью m и одним из членов, равным a; мы всегда считаем, что $m > 1$). Система прогрессий $\{a_1(m_1), \dots, a_r(m_r)\}$ называется *покрывающей*, если в объединении она даёт множество всех целых чисел.

Упражнение 1 (R. L. Graham)**.** Существует последовательность $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, в которой $(a, b) = 1$, но все члены — составные.

Упражнение 2 (F. Cohen, J. L. Selfrdge)**.** Существует бесконечно много нечётных чисел, непредставимых в виде $2^k \pm p^\ell$.

Замечание. В предыдущих двух упражнениях принимается также сведение утверждения к явно сформулированному (корректному) запросу на покрытие.

Упражнение 3 (P. Erdős)**.** Предположим, что верна гипотеза Эрдёша: для любого $C > 0$ существует покрывающая система с попарно различными модулями $m_1, \dots, m_n$, большими C. Докажите, что существуют бесконечно много натуральных нечётных n, не представимых в виде $n = 2^k + d$, где d имеет не более 1000 различных простых делителей.

Упражнение 4 (P. Erdős)**.** Постройте покрывающую систему с попарно различными модулями, являющимися делителями числа 210.

Упражнение 5. Пусть $\{a_1(m_1), \dots, a_r(m_r)\}$ — точная покрывающая система (т. е. *разбиение* $\mathbb{Z}$ на прогрессии), причём $0 \leqslant a_i < m_i$. Докажите, что $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{m_i} = \frac{n-1}{2}$.

Задача 6 (H. Pan)**.** Докажите, что существует система сравнений, покрывающая $\mathbb{Z}$ в 1000 слоёв, которую нельзя разбить на две покрывающих системы.

Часть 2

Определение 2. Покрывающая система называется *регулярной*, если после выкидывания любой прогрессии она перестаёт быть покрывающей. Покрывающая система называется *точной*, если каждое целое число покрыто **ровно** один раз. *Периодом* покрывающей системы мы называем число $M = [m_1, \dots, m_r]$.

Упражнение 7. Пусть $p^\alpha \mid M$. Насколько можно усилить нижнюю оценку на количество индексов i таких, что $p \mid m_i$?

Упражнение 8. Пусть $a_1(m_1), \dots, a_r(m_r)$ — точная покрывающая система. Докажите, что для любого i найдётся $j \neq i$ такое, что $m_i \mid m_j$.

Задача 9 (M. Berger, A. Felzenbaum, A. Fraenkel)**.** Пусть $a_1(m_1), \dots, a_r(m_r)$ — непустая система, p — наименьший простой делитель числа $M = [m_1, \dots, m_r]$, а k — натуральное число. Для каждого $x \in \mathbb{Z}$ посчитаем число прогрессий, покрывающих x. Предположим, что все эти числа имеют одинаковый остаток $\bmod k$. Докажите, что среди чисел m_i есть $\min(p, k)$ одинаковых.

Положим $f\left(\prod_i p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_i \alpha_i (p_i - 1)$.

Задача 11 (P. J. Simpson)**.** Пусть $a_1(m_1), \dots, a_r(m_r)$ — регулярная покрывающая система, $M = [m_1, \dots, m_r]$ — её период, $d \neq M$ — некоторый делитель числа M. Докажите, что

$$|\{i \colon m_i \nmid d\}| \geqslant 1 + f(M/d).$$

Задача 12 (M. Berger, A. Felzenbaum, A. Fraenkel)**.** Пусть $M = \prod_i p_i^{\alpha_i}$. Оказывается, можно расположить остатки $\bmod M$ в виде параллелепипеда $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots$ так, чтобы каждая прогрессия $a(m)$, где $m \mid M$, образовывала в этом параллелепипеде *блок*, то есть «подпараллелепипед» вида $\{(x_1, x_2, \dots) \colon c_i \leqslant x_i \leqslant d_i\}$. Придумайте такое сопоставление!

Часть 3

Упражнение 13. Докажите с помощью производящих функций что в точной покрывающей системе есть хотя бы p равных модулей, где p — наименьший простой делитель наименьшего общего кратного модулей.

Упражнение 14. Пусть $a_1(m_1), \dots, a_r(m_r)$ — регулярная покрывающая система. Докажите, что для любого $0 < k < m_r$ найдётся $J \subseteq \{1, \dots, r-1\}$ такое, что

$$\sum_{j \in J} \frac{1}{m_j} - \frac{k}{m_r} \in \mathbb{Z}.$$

Упражнение 15. Докажите, что система из r прогрессий покрывает $\mathbb{Z}$ хотя бы в n слоёв, если она покрывает 2^{r-n+1} подряд идущих чисел хотя бы по n раз каждое.

Задача 16 (H. Pan, Z.-W. Sun)**.** Докажите, что в системе, покрывающей $\mathbb{Z}$ хотя бы в n слоёв, каждое число вида $\left\{\sum_{j\in J}\frac{1}{m_j}\right\}$, $J\subseteq\{1,2,\ldots,r\}$, реализуется таким образом хотя бы для 2^n множеств J.

Часть 4

Упражнение 17. Пусть $a_1(m_1),\ldots,a_r(m_r)$ — точная n-покрывающая система (т. е. каждое целое число покрыто ровно n раз). Докажите, что для любого $0<s<nm_r$ число подмножеств $J\subseteq\{1,\ldots,r-1\}$ таких, что $\sum_{j\in J}\frac{1}{m_j}=\frac{s}{m_r}$, не меньше, чем $C_{n-1}^{[s/m_r]}$.

Задача 18 (M. Berger, A. Felzenbaum, A. Fraenkel)**.** Назовём точную систему *неприводимой*, если никакая её непустая подсистема, отличная от самой системы, не образует в объединении арифметической прогрессии. Докажите, что в неприводимой точной системе периода $M=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ (где $p_1<\cdots<p_k$) не меньше, чем $f(m_1)+(p_1-1)p_k$ прогрессий.

Задача 19 (M. Filaseta, K. Ford, S. Konyagin)**.** Пусть $a_1(m_1),\ldots,a_r(m_r)$ — произвольная система сравнений. Докажите, что плотность чисел, непокрытых ею, не меньше, чем

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)-\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant r\\(m_i,m_j)>1}}\frac{1}{m_im_j}.$$