Линейные коды

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 20-24 июля 2016

Задачи к занятию 1

Задача 1. Докажите неравенство треугольника для расстояния Хэмминга.

Задача 2. Пусть код $C \subseteq A^n$ исправляет t ошибок. Верно ли, что $d(C) \geq 2t + 1$?

Задача 3. Пусть F – произвольное поле и $h(x)$ – неприводимый многочлен над F. Докажите, что факторкольцо $F[x]/(h(x))$ является полем и многочлен $h(x)$ имеет в этом поле корень.

Задача 4. Пусть F – произвольное поле и $h(x)$ – многочлен положительной степени над F. Докажите, что существует расширение полей $F \subseteq L$, над которым $h(x)$ разлагается на линейные множители.

Задача 5. Полем разложения многочлена $h(x)$ над полем F называется такое расширение $F \subseteq L$, что

1) многочлен $h(x)$ разлагается над L на линейные множители;
2) если $L_0 \subseteq L$ – подполе, содержащее F и все корни многочлена $h(x)$, то $L_0 = L$.

Докажите, что для любого многочлена $h(x)$ поле разложение существует и единственно с точностью до изоморфизма на F.

Задача 6. Докажите, что в каждом конечном поле $\mathbb{F}_q$ найдется элемент a, такой что

$$\mathbb{F}_q = \{0, 1, a, a^2, \ldots, a^{q-2}\}.$$

Задача 7. Докажите, что любое подполе в $\mathbb{F}_{p^n}$ имеет порядок p^m, где m делит n. Более того, для любого делителя m числа n в $\mathbb{F}_{p^n}$ существует и единственно подполе из p^m элементов.