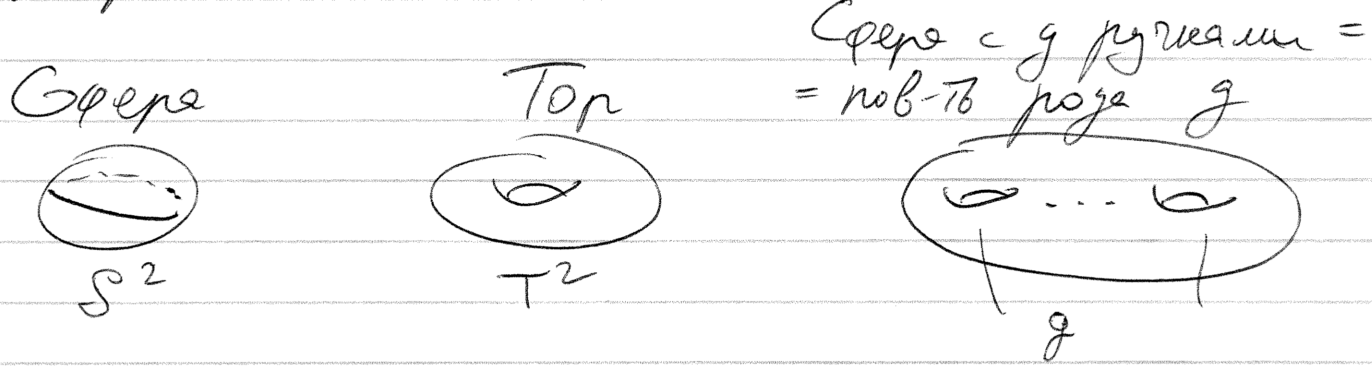
Лекция 1: проблема Дена на поверхности

§1 Поверхности и петли

Поверхности:



Обозначение: Σ_g

Петли:

стягиваемые (= тривиальные)

нестягиваемые (нетривиальные)

- $\forall$ петля на S^2 тривиальна
- $\exists$ нетрив. петли на Σ_g, $\forall g > 0$

Задача Дена Построить алгоритм, к-ый для зад. петли опред., стягиваема ли она

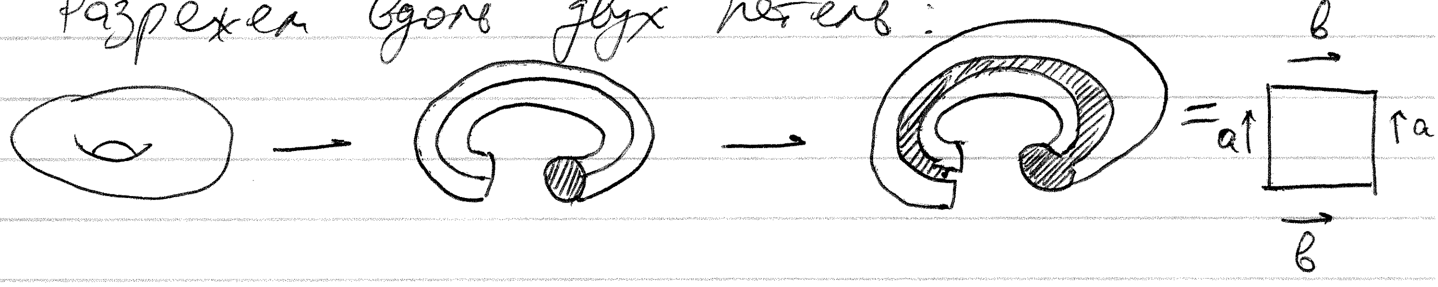
Цель лекции 1) Закодировать петли как слова в группе $\pi_1 \Sigma_g$; свести к проблеме распознавания трив. слова

2) Решить задачу Дена. Сначала для T^2, затем — для Σ_g

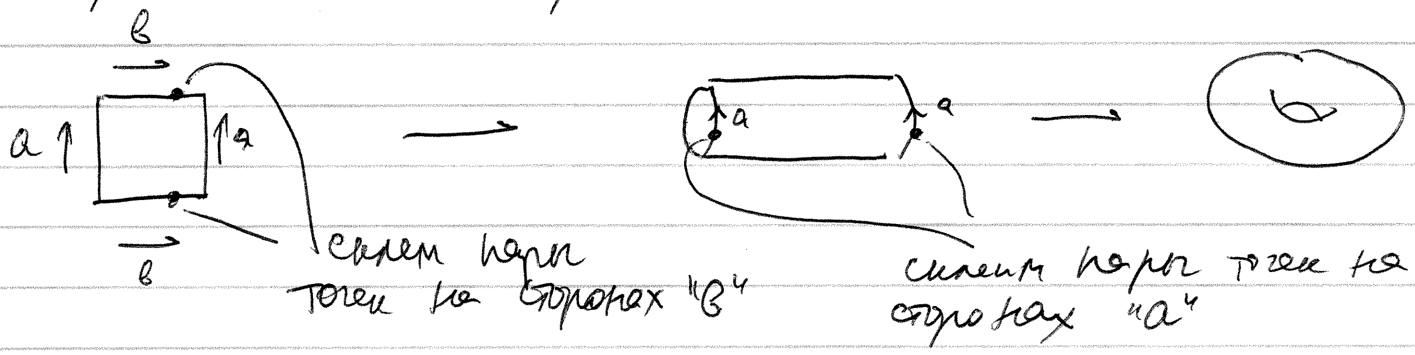
№2 Три взгляда на тор

1) Тор — это 

2) Разрежем вдоль двух петель:

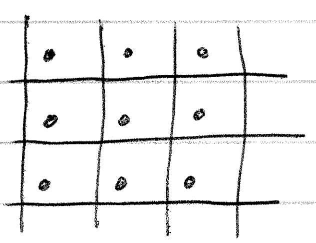


Тор = квадрат, у к-ого склеили пары точек на противопол. сторонах.



3) Тор = плоскость $R^2 \ni (x,y)$, у которой склеили

все точки вида $(x,y) \sim (x+k, y+l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$

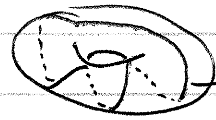


Все отмеч. точки = одна и та же точка после склейки

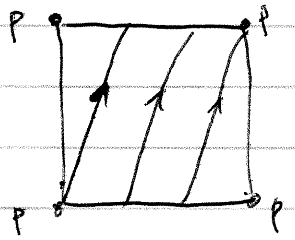
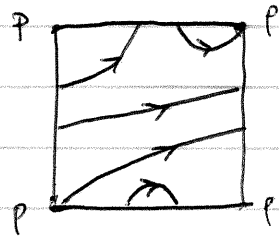
Почему тор? Оставим один квадрат т.к. он уже содержит копию любой точки. Но стороны содержат по 2 копии каждой точки, поэтому противопол. стороны надо склеить.

Склеив, получим тор.

§3 <u>Подъем петли</u> Аналогично петлю на торе можно рисовать 3-мя способами.

1) Прямой способ:  — петля γ

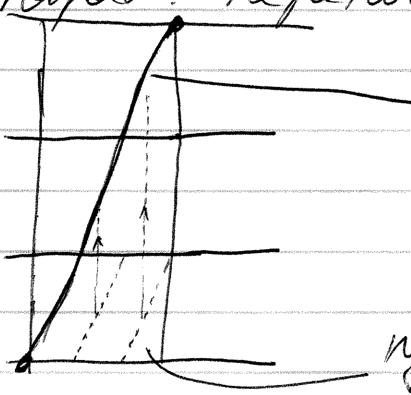
2) Разрежем и получим разрывный путь в квадрате

 или например 

концы (разрывы) — в противопол. точках границы

3) $\tilde{\gamma}$ — путь (непрерывный, но не петля) в $\mathbb{R}^2$.

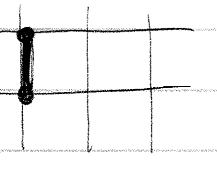
Получается из разрезанного пути на квадрате <u>парал. переносом кусков</u>:

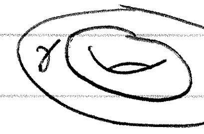
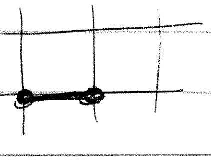
 путь $\tilde{\gamma}$

пунктир: разрывн. путь в квадрате

<u>Лемма 1</u> Петля γ стягиваема $\Leftrightarrow$ начало и конец $\tilde{\gamma}$ совпадают. (Без док.)

<u>Пример</u>

 $\Rightarrow \tilde{\gamma} =$ 

 $\Rightarrow \tilde{\gamma} =$ 

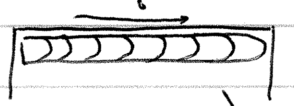
Лемма 3 • $\forall$ посл-ть символов a, a^{-1}, b, b^{-1} задает петлю в T^2

• $\forall$ петля в T^2 деформируется в одну из таких петель

Вопрос Дена ⟶ как по слову распознать задает ли оно трив. петлю

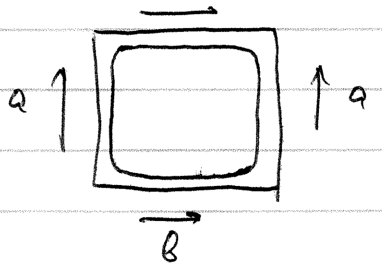
(i) пустое слово (обозн. символом 1) $\Rightarrow$ пост. петля (тривиальн.

(ii) петли вида aa^{-1}, bb^{-1} стягиваемы

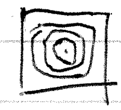


стягивание петли bb^{-1}

(iii) петли вида $aba^{-1}b^{-1}$ стягиваемы



петля $aba^{-1}b^{-1}$ = полный обход границы по кругу стягивается внутри квадрата.



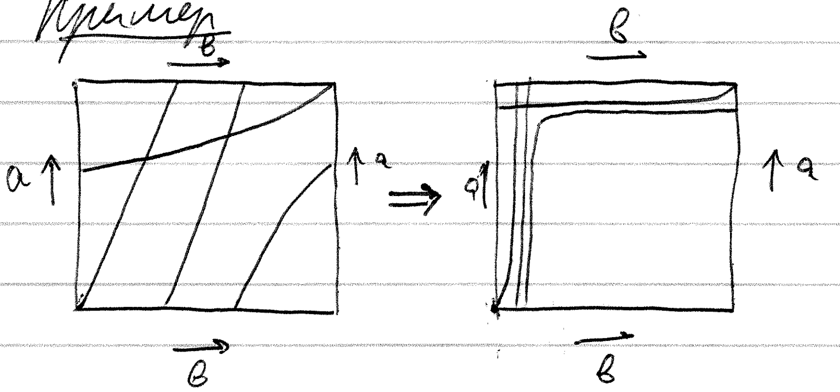
Лемма 4 Слово g из a, a^{-1}, b, b^{-1} задает стяг. петлю на T^2 $\Leftrightarrow$ $g=1$ в группе $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}=1 \rangle$

№4 Задание петли словом

Представим петлю γ на T^2 как разрывн. путь в квадрате

<u>Лемма 2</u> Всегда можно продеформировать γ так, что разрывн. путь проходит вдоль границы квадр

<u>Пример</u>

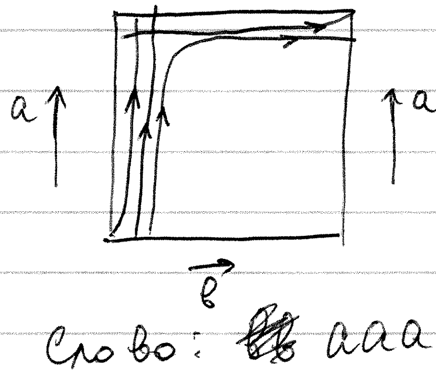


Каждая из сторон квадрата сама задает петлю (a или b); противопол. стороны задают одну петлю

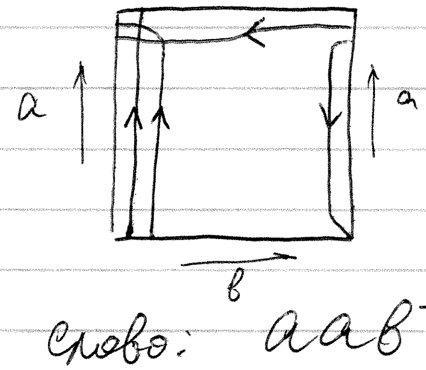
Петля γ задается разрывн. путем вдоль границу кв-та $\Rightarrow$ γ задает обход вдоль границу квадрата, кодируемый посл-тью символов a, a^{-1}, b, b^{-1}

(эта посл-ть называется <u>словом</u> из a, b)

<u>Пример</u>



Слово: ~~bb~~ $aaabb = a^3b^2$



Слово: $aab^{-1}a^{-1} = a^2b^{-1}a^{-1}$

<u>Напоминание</u> $a_1 \dots a_n$ — символы;

группа $G = \langle a_1 \dots a_n \mid R_1 \dots R_m \rangle$

соотношения R_i — слова из $a_1^{\pm 1} \dots a_n^{\pm 1}$

след. слова в G объявлены равными:

$(\dots) a_i a_i^{-1} (\dots) = (\dots)(\dots)$; $(\dots) R_j (\dots) = (\dots)(\dots)$

(сократим $a_i a_i^{-1}$) (сократим R_j)

<u>Лемма 5</u> Слово в группе $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ тривиально (т.е. равно пустому)

$\Updownarrow$

($\sum$ степеней при символе a) $= 0$

и ($\sum$ степеней при символе b) $= 0$

<u>Пример</u> $aaba^{-1}b^{-1}a^{-1} = 1$, $aab \neq 1$

Решение пробл. Дена для тора — это леммы 3, 4, 5.

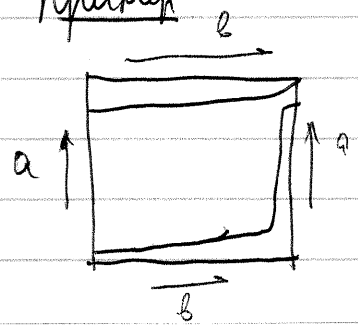
§6 <u>Поднятие слова, повтор.</u> Напомним:

~~На~~ Слово из $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ $\longleftrightarrow$ разрывн. путь вдоль границы □ $\longleftrightarrow$ путь $\tilde{\gamma}$ в R^2 вдоль сторон решетки

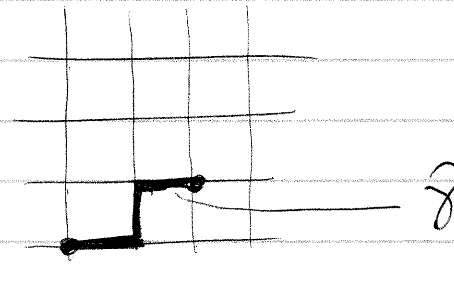
$\updownarrow$

петля γ $\qquad$ $\tilde{\gamma}$ = поднятие γ

<u>Пример</u>

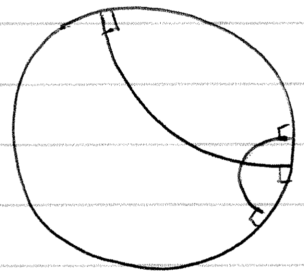


слово: bab



Поэтому лемма 1 ⟸ лемма 5
(начало и конец $\tilde{\gamma}$ совпад. ⟺ ($\sum$ степ a) = ($\sum$ степ b) = 0)

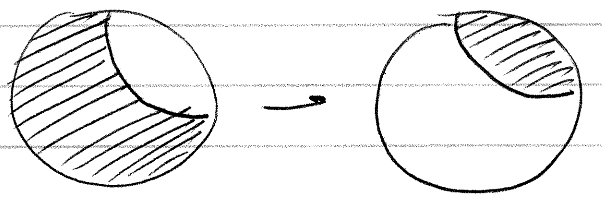
§7 Гиперболич. плоскость



Интуитивно: H^2 = круг (диск)

прямые в H^2 = дуги окр-тей, $\perp$ границе

прямая задает отражение:

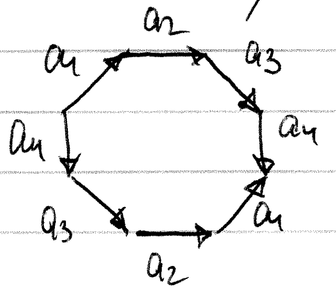


отражение — изометрия, т.к. переводит прямые в прямые

(геометрически, отражение реализуется евклидовой инверсией)

§8 Σ_g и $4g$-угольники

Σ_g = $4g$-угольник, у которого попарно склеили противопол. стороны:



Аналогично тору,

- слово g из $a_1^{\pm 1} \dots a_{2g}^{\pm 1}$ задает петлю в Σ_g
- слова $a_i a_i^{-1}$, $R = \underbrace{a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}}_{\text{одно длинное слово!}}$

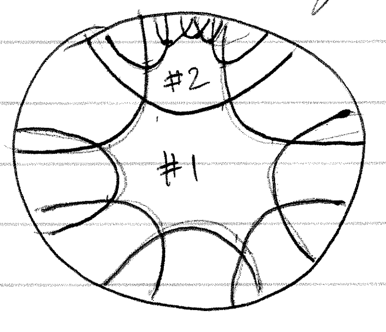
задают трив. петли

• потому петля трив. $\Leftrightarrow$ $g=1$ в группе

$$\pi_1 \Sigma_g = \langle a_1, \dots, a_{2g} \mid R \rangle \qquad R\text{: см. выше}$$

<u>Групповая версия задачи Дена</u> Для слова $g \in \pi_1 \Sigma_g$ определить, верно ли что $g=1$?

H^2 можно замостить правильными $4g$-угольниками, $g>1$



($\exists$ $4g$ прямых, огранич. прав. $4g$-угольник #1. Замощение получ. из послед. отражений отн. этих прямых. Например, #2)

Как с тором, слово g в $\pi_1 \Sigma_g$ задает путь $\tilde{\gamma}$ вдоль сторон замощения.

<u>Лемма 6</u> Слово g трив. $\Leftrightarrow$ начало и конец $\tilde{\gamma}$ совпад.

(т.к. оба условия $\Leftrightarrow$ соотв. петля в Σ_g стягиваема).

Далее, пусть $g=2$.

§9 <u>Решение проблемы Дена</u>

Пусть $\tilde{\gamma}$ – путь в H^2 вдоль сторон замощения, который замкнут и ограничивает область Ω.

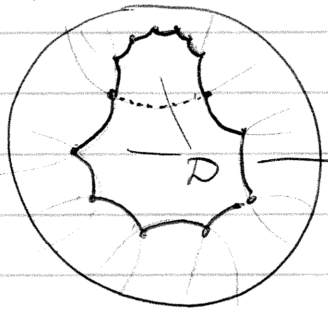
<u>Лемма 7</u> (дискретная ф-ла Гаусса–Бонне)

$$8 = -16 + \sum_{P \cap \tilde{\gamma} \neq \emptyset} (7 - 3\,\mathrm{val}(P))$$

где сумма по всем 8уг. P, пересекающим $\tilde{\gamma}$ (т.е. содержащих сторону $\tilde{\gamma}$), и $\mathrm{val}(P) = \dots$

... = к-во 8-угольников внутри D, прилегающих к P.

Пример



Замк. путь γ; $D = 2$ 8-уг-ка

Лемма Дена $\forall$ замк. пути γ вдоль сторон замощения, $\exists$ 8-уг-к в D, содержащий ≥ 5 сторон γ.

(следует легко из ф-лы Гаусса-Бонне).

Решение проблемы Дена. Слово в $\pi_1 \Sigma_g \rightsquigarrow$ путь γ. Если слово трив., то γ замкнут, тогда γ можно сократить (до трив. пути) след. образом:

- находим 8-уг P т.ч. $P \cap \gamma = \geq 5$ сторон
- заменяем эти ≥ 5 сторон на ≤ 3 оставш. стороны P; это укорачивает γ.

Если в какой-то момент не смогли найти P, значит, γ был незамкнут.