

Задачи Г. Б. Шабата к лекции 2

Задачи для решения традиционными методами

T2.1. Пусть кривая задана уравнением $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x^i y^j = 0$. В каком случае её проекция на ось x состоит из конечного числа точек? Докажите, что при почти любой замене координат $x = ax' + by' + c, y = dx' + ey' + f$ соответствующая проекция состоит из почти всех точек оси x' . Какие точки не попадут в проекцию?

T2.2. Укажите несколько точек на мнимой окружности $x^2 + y^2 = -1$. Изучите проекцию мнимой окружности на ось y .

T2.3. Пусть кривая задана уравнением $f(x, y) = 0$. Какова степень многочлена от x , корни которого являются проекциями на ось x точек пересечения кривой с прямой, заданной уравнением $y = kx + b$? для каких прямых степень этого многочлена от x падает? Для каких прямых этот многочлен имеет кратные корни?

T2.4. Докажите, что две прямые на проективной плоскости либо совпадают, либо пересекаются в единственной точке.

T2.5. Докажите несколькими способами, что коника, проходящая через 5 точек, невырождена тогда и только тогда, когда никакие 3 из этих точек не лежат на одной прямой.

T2.6. Проведите полную классификацию возможных расположений двух (комплексных проективных) невырожденных коник. Указание. Воспользуйтесь удобными координатами.

T2.7. При каких t кубика Лежандра $Y^2Z = X(X - Z)(X - tZ)$ имеет особые точки?

T2.8. Докажите, что кривая, двойственная к конике – коника.

T2.9. Напишите уравнения касательных, проведённых из точки $(x, y) = (0, 0)$ к окружности $x^2 + y^2 = 1$; из точки $(x, y) = (0, 1)$ к параболе $y = x^2$; из точки $(x, y) = (2, 2)$ к гиперболе $xy = 1$. Аффинные координаты перерабатываются в проективные по известным правилам.

Задачи для решения с помощью компьютерной геометрии

Г2.1. Создайте компьютерное средство, позволяющее проводить конику через пять точек. Указание. Воспользуйтесь теоремой Паскаля.

Г2.2. Проиллюстрируйте теорему Понселе для двух пересекающихся вещественных эллипсов.

Задачи для решения с помощью компьютерной алгебры

A2.1. Когда многочлен $aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2$ является

(а) произведением двух многочленов степени 1; (б) квадратом многочлена степени 1?

A2.2. С помощью подходящей замены координат $X = \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z', \dots$ приведите общее уравнение коники к диагональному виду $\lambda X'^2 + \mu Y'^2 + \nu Z'^2 = 0$. Как в диагональном виде различаются случаи, рассмотренные в предыдущем упражнении?