Задачи к лекциям 3 и 4

Задачки можно сдавать Артёму и Никону (комната 229-Б) в любое время, когда мы не играем в футбол/волейбол/...
Если возникают вопросы по лекциям и задачкам, то смело задавайте! Листочки с задачками, лекции и литература доступны на диске О в папке materials/avilov-kurnosov.

1.

a) Найдите все единицы в $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{229})$.

b) Покажите, что в поле $\mathbb{Q}(\theta), \theta^3 = 2$, всякая единица имеет вид $\pm(1-\theta)^k$.

2. Верно ли, что кольцо целых в $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt{7}]$ - это $\mathbb{Z}[\sqrt{3}, \sqrt{7}]$? Найдите кольцо целых для $\mathbb{Q}[\sqrt{57}]$

3. Докажите, что кольцо многочленов и кольцо формальных степенных рядов являются кольцами главных идеалов.

4. Докажите, что неравенство $\nu(X) > 2^n\Delta$ в лемме Минковского о выпуклом теле нельзя заменить более слабым. Для этого надо построить выпуклое ограниченное центрально-симметричное множество X с объемом $\nu(X) = 2^n\Delta$, не содержащее, кроме начала, никаких других точек решётки.

5. Докажите, что для $x, y, z \in \mathbb{N}$ уравнение $x^4+y^4 = z^2$ имеет решение только в том случае, если $xyz = 0$.

6. Является ли кольцо целых в $\mathbb{Q}[\sqrt{57}]$ решёткой в нём?

7.

a) Рассмотрим поле разложения многочлена $x^4 - 2$. Опишите группу единиц. Определите число вложений в $\mathbb{C}$. Сколько из них чисто вещественных? Вычислите норму элемента $\sqrt[4]{2} + i$

b) Рассмотрим $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Найдите норму элемента $\alpha = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$

8. Решётка Γ в $\mathbb{R}^n$ полная тогда и только тогда, когда, существует ограниченное подмножество $X \subseteq \mathbb{R}^n$, такие что набор всех множеств $X + \gamma$, где $\gamma \in \Gamma$ покрывает всё пространство.

9. Докажите, что любое положительное число является суммой четырёх квадратов.

Указание: Воспользуйтесь леммой Минковского.