Задачи к лекции 2

Задачки можно сдавать Артёму и Никону (комната 229-Б) в любое время, когда мы не играем в футбол/воллейбол/...
Если возникают вопросы по лекциям и задачкам, то смело задавайте! Листочки с задачками, лекции и литература доступны на диске O в папке materials/avilov-kurnosov.

1. Покажите, что в случае $d = s^3 - 1$ уравнение $x^3 - dy^3 = 1$ (кубический аналог уравнения Пелля) имеет решение

2. Рассмотрим уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$. Найдите $(3,2)^n$, $n = 4, 6$. Насколько точно они аппроксимируют $\sqrt{2}$? Каким подходящим дробям они соответствуют?

3. Рассмотрим уравнение Пелля $x^2 - qy^2 = 1$ с $q = m^2 + 1$. Покажите, что целые решения его имеют вид $x = 2m^2 + 1$ и $y = 2m$.

4. Докажите, что, если $|p - q\alpha| \leq |p_n - q_n\alpha|$ и $0 < q < q_{n+1}$, то $p = p_n, q = q_n$ (лемма из лекции), где p, q - целые.

5. Найдите все треугольные числа, являющиеся полными квадратами.

6. Докажите, что существует бесконечное число троек подряд идущих целых чисел, являющихся суммой квадратов двух чисел.

7. Рассмотрим уравнение $x^2 - mxy + y^2 = 1$, где m -целое число. Докажите, что положительные числа x, y удовлетворяют этому уравнению тогда и только тогда, когда x, y - соседние числа последовательности, заданной рекуррентным соотношением $z_{k+1} = mz_k - z_{k-1}$ и $z_0 = 0, z_1 = 1$.

8. Докажите, что числители (p_n) и знаменатели (q_n) подходящих дробей к цепным удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$p_{n+1} = p_n a_{n+1} + p_{n-1}, q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1}.$$

9. Рассмотрим уравнение вида

$$ma^2 + 2nab + kb^2 = 1,$$

где m, n, k - целые числа, такие что $m > 0$ и $mk - n^2 = 1$. Верно ли, что оно имеет целочисленное решение?

10.* Рассмотрим выражение

$$Q(x, y) = x^2 + xy - y^2,$$

тогда

a) Докажите, что решения $Q(x, y) = 1$ это (F_{2n+1}, F_{2n+2}), где F_n - n-ое число Фибонначчи.

b) Проверьте, что

$$(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n = F_{2n+1} + F_{2n+2}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$