Дифференцирования в алгебре

курс И.В. Аржанцева

летняя школа "Современная математика"(г. Дубна), 20-24 июля 2014 года

Задачи к занятию 1

Задача 1. Докажите, что характеристика поля либо равна нулю, либо является простым числом. Приведите пример бесконечного поля характеристики p для любого простого p.

Задача 2. Докажите, что любая конечно порожденная алгебра над полем k изоморфная факторалгебре алгебры многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ для подходящего натурального n. Докажите, что любая подалгебра в $k[x]$ конечно порождена. Приведите пример не конечно порожденной подалгебры в $k[x, y]$.

Задача 3. Проверьте, что коммутатор $[D, E]$ двух дифференцирований является дифференцированием. При каких условиях композиция $D \circ E$ двух дифференцирований является дифференцированием?

Задача 4. Вычислите явно коммутатор $[D, E]$ двух дифференцирований алгебры многочленов, где $D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $E = \sum g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Задача 5. Найдите образующие подалгебры $\operatorname{Ker} D$, где $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$ и $\operatorname{char} k = p$.

Задача 6. Приведите пример дифференцирования D алгебры а) $k[x, y]$; б) $k[x, y, z]$, для которого $\operatorname{Ker} D = k$.