Листок 2

Задача 2.1. Пусть $d_\lambda(m)$ — число полустандартных таблиц формы λ, заполненных числами из множества $\{1,\dots,m\}$. Докажите, что

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_r} d_\lambda(m)d_\lambda(n) = \binom{r+m\cdot n-1}{r},$$

(суммирование идет по всем диаграммам Юнга из r клеток).
Задача 2.2. Пусть T — полустандартная таблица формы λ. Докажите, что ее табличному слову $w(T)$ эквивалентны по Кнуту ровно f^λ слов (напомним, что f^λ — это число стандартных таблиц формы λ).
Задача 2.3. Пусть $\pi = \{\pi_{ij}\}$ — плоское разбиение, $P(r,c)$ — множество плоских разбиений с не более, чем r строчками и c столбцами. Докажите *q-версию формулы Мак-Магона*

$$\sum_{\pi\in P(r,c)} q^{\sum_i \pi_{ii}} x^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{c}\frac{1}{1-qx^{i+j-1}}.$$

Задача 2.4. Назовем перестановку чисел от 1 до n *инволюцией*, если ее повторное применение дает тождественную перестановку. Покажите, что число инволюций в S_n равно

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{(n-2k)!\cdot 2^k k!}.$$

Задача 2.5. Докажите, что

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} f^\lambda = \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{(n-2k)!\cdot 2^k k!}.$$

Задача 2.6. Докажите, что число полустандартных таблиц Юнга, составленных из r единиц, r двоек и r троек (и без других элементов), равно

$$\frac{1}{16}(4r^3+18r^2+28r+15+(-1)^r).$$