

А.Г.СЕРГЕЕВ

**МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА:  
СКОВАННЫЕ ОДНОЙ ЦЕПЬЮ**

2013

# ЕДИНОЕ ПРОИСХОЖДЕНИЕ

Актуальность постановки вопроса о взаимосвязи математики и физики

Кем были Ньютон, Гюйгенс, Паскаль и Галилей?

Математика и физика происходят из одного корня.

Физика написана на языке математики (Кант: “в каждой науке ровно столько науки, сколько в ней математики”.)

Теорминимум Ландау.

В.И. Арнольд: “математика — часть физики”.

“Физические” разделы математики.

# РЕВОЛЮЦИЯ НА РУБЕЖЕ ЭПОХ

1

Проникновение  
в микромир

2

Создание  
квантовой  
механики

3

Споры вокруг  
оснований  
квантовой механики

4

Необычайная  
эпоха

5

Дирак на семинаре в Геттингене

6

Уравнение Гейзенберга  $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$ ,  
где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$  – операторы,  
являющиеся квантовыми аналогами обычных  
координаты и импульса. Уравнение Гейзенберга  
означает, что квантовые координаты и импульс  
не коммутируют друг с другом.

7

“Нефизичность”  
уравнения  
Гейзенберга

8

Прогулка Дирака  
в Кембридже

9

Скобки Пуассона и “Аналитическая  
динамика” Уиттекера

10

Дираковское определение квантования: скобки Пуассона классических наблюдаемых должны при квантовании переходить в коммутаторы отвечающих им квантовых наблюдаемых

11

“Мостик” между квантовой и классической механикой: квазиклассический предел

12

Теория матриц

13

Математический язык квантовой механики: гильбертовы пространства

14

Гильберт, Шмидт  
и Стеклов

# Поль Дирак и Николай Николаевич Боголюбов

- Дирак: “Физические законы должны обладать математической красотой” (1955, физфак МГУ)
- Девиз Дирака: в споре между математической красотой физического закона и его экспериментальной стороной выбирай первое
- Дирак и физик-экспериментатор
- Дирак: “Я верю своей математике больше, чем результатам чьих-то экспериментов”
- Конференция, посвященная монополю Дирака
- Ответ Дирака

- Боголюбов как физик: сверхпроводимость и сверхтекучесть, квантовая теория поля
- Атомный проект и Дубна
- Боголюбов как математик: многомерный комплексный анализ, теория почти периодических функций, нелинейная механика
- Теорема об острове клина ( edge-of-the-wedge )
- Теорема: функция в круге, которая непрерывна в его замыкании и аналитична отдельно в верхнем и нижнем полукруге, аналитична во всем круге.
- Другая формулировка: если заданы аналитические функции в верхнем и нижнем полукруге, которые продолжаются непрерывно на общий вещественный диаметр, где их значения совпадают, то эти функции можно продолжить до единой функции, аналитической во всем круге.

- Теорема Боголюбова: допустим, что у нас имеются две области в  $n$ -мерном комплексном пространстве, имеющие в качестве общего участка границы шар в вещественном подпространстве. В качестве таких областей можно, например, взять сумму вещественного шара с верхним и нижним конусом в дополнительном, “чисто мнимом” пространстве.

Предположим далее, что заданы две функции, аналитические в указанных областях и непрерывно продолжающиеся на общий вещественный шар, где их значения совпадают. Тогда указанные функции продолжаются до единой функции, аналитической в комплексной окрестности исходного вещественного шара.

- Отличие этой теоремы от ее одномерного аналога в том, что в одномерном случае функция уже была задана во всем круге и нужно было только проверить ее аналитичность. Напротив, в многомерном случае она задана на вещественном шаре и некоторой части объемлющего комплексного пространства, а утверждается, что ее можно аналитически продолжить в том числе и в те точки комплексной окрестности шара, где она первоначально задана не была.

- Теорема Боголюбова была столь необычна для того времени, что математики поначалу сомневались в ее верности, пока не было опубликовано подробное доказательство.



# ПОДРОБНЕЕ О КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

- Классическая механика: постановка задачи.

Рассмотрим материальную точку, эволюция которой во времени представляет собой траекторию  $\gamma$ , называемую *мировой линией*.

Каким образом можно выделить среди всех траекторий, соединяющих начальную и конечную точку  $\gamma$ , ту, которая отвечает реальной мировой линии? Интуиция подсказывает, что такая траектория должна быть кратчайшей.

И это почти верно.

- **Действие:** исходя из физических свойств среды, в которой движется рассматриваемая материальная точка, можно ввести понятие “расстояния”, позволяющее измерять “длину” траектории. Такую “длину” в физике принято называть *действием*.

- **Принцип наименьшего действия:** мировая линия должна быть линией наименьшего действия.

- Если среда однородна, то частица будет двигаться по прямой. На границе двух сред мировая линия может иметь излом (как в законе о преломлении света). Если же свойства среды меняются от точки к точке, то мировая линия будет представлять собой сложную кривую, вычисление которой может оказаться непростой математической задачей.

- Переход к квантовой механике: детерминированность классической механики уступает место вероятностному подходу

- А именно, теперь мы можем найти только вероятность перехода частицы из начального в заданное конечное состояние. Указанная вероятность будет определяться суммой вкладов от ВСЕХ траекторий, соединяющих начальную точку с конечной.

- Более формально: указанная вероятность определяется интегралом вида

$$\int e^{\frac{i}{\hbar} S(\gamma)} d\gamma,$$

где  $S(\gamma)$  – действие траектории  $\gamma$ , т.е. “длина” в выбранной метрике, а интеграл берется по множеству всех траекторий, соединяющих начальную точку с конечной.

- Придание точного смысла этому интегралу: Винер.

- **Вопрос:** каким образом указанный интеграл связан с принципом наименьшего действия? Или, иными словами, как квантовый микромир связан с нашим механическим макромиром? Для выявления этой связи мы и поставили в показателе экспоненты постоянную Планка  $\hbar$ .

- **Постоянная Планка:** эта постоянная, отвечающая энергии одного кванта света, является с точки зрения квантового микромира вполне ощутимой величиной, но она исчезающе мала с точки зрения нашего макромира. Поэтому для того, чтобы вернуться в классическую механику, нужно в указанном интеграле устремить  $\hbar$  к нулю, забывая о том, что это постоянная.

- **Квазиклассическое приближение:** предел при  $\hbar \rightarrow 0$ .

- **Метод перевала:** в пределе при  $\hbar \rightarrow 0$  вклад в предельный интеграл будут давать только траектории с наименьшим действием.

- **Принцип соответствия:** предлагая новую физическую теорию, необходимо не только указать границы ее применимости, но и предъявить механизм перехода от этой новой теории к старой.
- Таким образом, физика не отрицает построенных ранее теорий, а включает их в новые.

# ТЕОРИЯ СТРУН

- **Кварки:** в процессе развития теории элементарных частиц была выдвинута гипотеза о том, что эти элементарные частицы (такие как протоны, нейтроны, электроны, нейтрино и т.д.) в свою очередь состоят из еще более элементарных частиц — кварков.
- **Конфайнмент:** Гипотеза выглядела вполне убедительно, но кварки никак не удавалось обнаружить экспериментально. Указанное явление получило название “конфайнмента” или “невылетания” кварков.
- **Кварки на нити:** кварки в составляемой ими частице связаны друг с другом упругой нитью. Эта нить позволяет им свободно двигаться внутри частицы (т.н. *асимптотическая свобода* кварков), но не позволяет вылетать за ее пределы из-за большой прочности связывающей их нити.

- **Идея струны:** частица представляет собой не точку, а линейно протяженный объект — *струну*, которая может быть как замкнутой (искривленной окружностью), так и открытой (отрезок кривой).

- **Мировая поверхность:** результатом эволюции струны во времени является мировая поверхность, соединяющая начальное положение струны с конечным. Как и в классической механике, мировая поверхность выделяется среди всех поверхностей, соединяющих начальное и конечное положения, тем, что имеет минимальную “площадь”, где площадь снова нужно понимать как “физическую”, иначе говоря, как действие.

- **Переход к квантовой теории:** как и в квантовой механике, нужно учитывать вклад от всех поверхностей, соединяющих начальное и конечное положения струны.

- Иными словами, речь идет об интеграле

$$\int e^{\frac{i}{\hbar} S(\Sigma)} d\Sigma$$

по множеству всех поверхностей  $\Sigma$  указанного ранее вида, при этом  $S(\Sigma)$  обозначает действие поверхности  $\Sigma$ .

- Переходя в этом интеграле к пределу при  $\hbar \rightarrow 0$ , мы можем снова выделить в нем вклад от минимальных поверхностей.



- **Критическая размерность:** в отличие от квантовой механики приведенному интегралу удастся придать смысл только в предположении, что струны “живут” не в нашем 4-мерном пространстве-времени, а в 26-мерном пространстве.

- **Суперструны:** если же учесть тот факт, что физические частицы делятся на два класса — бозонов и фермионов — и обобщить описанную нами теорию до теории *суперструн*, допускающей частицы обоих типов, то аналог указанного интеграла в этом суперсимметричном случае будет иметь смысл только в предположении, что рассматриваемые суперструны “живут” в 10-мерном пространстве.

- **Единая теория поля?** Теория суперструн претендует на единое описание всех имеющихся в природе физических взаимодействий, т.е. гравитационного, электрического, слабого и сильного. Тем самым, она, казалось бы, реализует главную мечту физиков 20-го века — создание единой теории поля.

Вопрос: каким образом описанная 10-мерная теория суперструн связана с нашим 4-мерным миром?

Ответ: 10-мерное пространство теории суперструн устроено как произведение

$$M^4 \times K^6$$

нашего 4-мерного пространства-времени и “очень малого” 6-мерного пространства. Настолько малого, что в нашем макром мире мы никак не ощущаем присутствия этих дополнительных измерений. Они начинают проявляться только при очень высоких энергиях, которые могут достигаться в первые моменты жизни Вселенной непосредственно после “большого взрыва” (Big-Bang).

- **Супервзаимодействие:** сразу после “большого взрыва” наше пространство согласно теории суперструн было 10-мерным и в нем существовал только один вид взаимодействий, а именно супервзаимодействие.

- **Спонтанная компактификация:** при остывании Вселенной супервзаимодействие уступает место четырем известным нам видам взаимодействий, а единственным напоминанием о дополнительном 6-мерном пространстве служат известные нам элементарные частицы, которые и рождаются из указанного 6-мерного пространства. Описанный процесс называется “спонтанной компактификацией” (намек на компактность дополнительного пространства  $K^6$ ).

- **Основная проблема, связанная со спонтанной компактификацией:** как получить из нее все известные нам элементарные частицы и не получить слишком много новых. Это накладывает на искомое дополнительное пространство настолько серьезные чисто математические ограничения, что на данный момент неясно, существуют ли пространства, удовлетворяющие всем этим ограничениям.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Теория струн — корректная математическая теория? Теория струн выглядит красивой, достаточно “сумасшедшей” и многообещающей теорией. Однако ее трудно считать корректной математической теорией, поскольку многие ее выводы получены на “физическом уровне строгости”, исходя из положений, которые математически совершенно не обоснованы.

- Однако, несмотря на подобную необоснованность, теория струн дала замечательные результаты в применении к математике. На основе ее идей физики выдвинули ряд предсказаний в области математики, правильность которых была затем полностью или частично подтверждена математиками.

Среди таких предсказаний:

- “Зеркальная симметрия”, утверждающая существование “зеркальных” двойников у некоторых многообразий.
- Связь между, казалось бы, далекими друг от друга теориями Янга–Миллса и Зайберга–Виттена и т.д.

- Уникальная ситуация в истории взаимодействия физики и математики: в то время как квантовая теория поля и теория струн успешно описывают поведение элементарных частиц и даже делают правильные математические предсказания, они остаются совершенно не обоснованными с математической точки зрения.

- **Главная проблема:** математикам не удалось выработать правильный язык для описания моделей квантовой теории поля.

- **Главная задача:** создание такого языка является настоящим вызовом, брошенным математике со стороны теоретической физики. Дать на него достойный ответ — одна из главных задач математики 21-го века.