Замощения. Задачи-2: начала теории групп. (по занятиям Кожевникова)

1. (Циклические группы) Пусть $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа. а) Докажите, что $G \cong \mathbb{Z}$ в случае $|G| = \infty$ и $G \cong \mathbb{Z}_n$ в случае $|G| = n$. б) Опишите подгруппы $H \leqslant G$. в) (порождающие элементы) Опишите все $x \in G$ такие, что $\langle x \rangle = G$.

2. (Порядок элемента группы) *Порядком* элемента $a \in G$ (обозначаем $\mathrm{ord}(a)$) называется наименьшее $k \in \mathbb{N}$ с условием $a^k = 1$. Если такого k не существует, то полагаем $\mathrm{ord}(a) = \infty$.

   а) Докажите, что $\mathrm{ord}(x) = |\langle x \rangle|$. б) Докажите, что $\mathrm{ord}(yxy^{-1}) = \mathrm{ord}(x)$. в) Найдите достаточные условия для выполнения равенства $\mathrm{ord}(xy) = \text{НОК}[\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y)]$. г) Докажите, что $\mathbb{Z}_{mn} = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow \text{НОД}(m, n) = 1$.

3. (Группа перестановок) а) Докажите, что любая $\tau \in S_n$ является произведением *независимых циклов*. б) Выразите $\mathrm{ord}(\tau)$ через длины этих циклов. в) Покажите, что $S_n = \langle (12), (13), \ldots, (1n) \rangle$. г) Покажите, что $S_n = \langle (12), (12\ldots n) \rangle$.

4. (Группы изометрий) Опишите группы изометрий а) круга (на плоскости); б) правильного n-угольника (на плоскости); в) сферы; г) правильного тетраэдра; д) куба (или правильного октаэдра).

5. (Подгруппы) Пусть G — группа; $H \leqslant G$. а) (Левые смежные классы) Для $x, y \in G$ докажите, что $xH = yH$ либо $(xH) \cap (yH) = \varnothing$ (здесь $xH = \{xh \,|\, h \in H\}$). б) (Теорема Лагранжа) Если $|G| < \infty$, то $|G|$ делится на $|H|$. в) (Следствие) Если $x \in G$, то $|G|$ делится на $\mathrm{ord}(x)$ (иначе: $x^{|G|} = 1$). г) Если $|G| = p$ — простое число, то G — циклическая.

6. (Свободная группа, соотношения) Пусть $\mathbf{W}$ — множество слов в алфавите $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, \ldots\}$; $\mathbf{R} = \{R_1, \ldots\} \subset \mathbf{W}$. Положим $W_1 \overset{R}{=} W_2$ в случае, если от W_1 к W_2 можно перейти конечной последовательностью операций вставки либо вычеркивания *подслова* вида xx^{-1}, где $x \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, \ldots\}$, либо подслова вида $W^{\pm 1}$, где $W \in \mathbf{R}$.

   а) Докажите, что отношение $\overset{R}{=}$ — есть отношение эквивалентности, и множество классов эквивалентности $\mathbf{W}/\overset{R}{=}$ — группа относительно операции приписывания слов. (Эту группу обозначают $\langle a, b \ldots \,||\, R_1, \ldots \rangle$ и называют группой, заданной *порождающими (образующими)* $a, b, \ldots$ и *определяющими соотношениями* $R_1, \ldots$. В случае $\mathbf{R} = \varnothing$ получаем *свободную группу* $F(a, b, \ldots)$ со *свободными образующими* $a, b, \ldots$).

   б) (Нормальная форма элемента свободной группы) Докажите, что каждый класс эквивалентности из множества классов $\mathbf{W}/\overset{\varnothing}{=}$ содержит единственное *несократимое слово*.

   в) Пусть $W \in \mathbf{W}$. Докажите, что $W \overset{R}{=} 1 \Leftrightarrow$ существуют слова $X_1, \ldots, X_t \in \mathbf{W}$ и $S_1, \ldots, S_t \in \mathbf{R}$ такие, что $W \overset{\varnothing}{=} (X_1 S_1^{\pm 1} X_1^{-1}) \ldots (X_t S_t^{\pm 1} X_t^{-1})$. (Имеется геометрическая (на плоскости) интерпретация этого факта — лемма Ван-Кампена).

   г) (Универсальность) Пусть G — произвольная группа, в ней зафиксировали элементы $\overline{a}, \overline{b}, \ldots \in G$. Докажите, что гомоморфизм $\varphi : \langle a, b \ldots \,||\, R_1, \ldots \rangle \to G$ с условием $\varphi(a) = \overline{a}, \varphi(b) = \overline{b}, \ldots$ существует тогда и только тогда, когда значения $R_1(\overline{a}, \overline{b}), \ldots$ равны 1 в G.

   д) Докажите, что в группе $\left\langle a, b \,||\, aba^{-1}b^{-1} = 1 \right\rangle$ выполнено соотношение $a^k b^l a^{-k} b^{-l} = 1$;

   е) в группе $\left\langle a, b \,||\, ab^2a^{-1}b^{-2} = a^2ba^{-2}b^{-1} = 1 \right\rangle$ не выполнено соотношение $a^7b^7a^{-1}ba^{-7}b^{-7}ab^{-1} = 1$.

7. (Граф Кэли) Опишите графы Кэли групп а) $\mathbb{Z}^2$ ($\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$); б) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$; в) $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$; г) $F_2(a, b)$ (свободная группа); д) $\left\langle a, b, \,||\, a^3 = b^3 = (ab^{-1})^3 = 1 \right\rangle$; е) $\left\langle a, b, c \,||\, a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^3 = 1 \right\rangle$.

   ж) Пусть $H \leqslant G$. Докажите, что $\mathrm{Cay}(G)$ можно замостить фигурками, *равными* (определите равенство!) H.

References (Combinatorial group theory):

1. А. Клячко. Спецкурс по теории групп.

`http://halgebra.math.msu.su/staff/klyachko/sk.htm`

2. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. *Комбинаторная теория групп*: Пер. с англ. — М.: Наука, 1974.

3. Ольшанский А.Ю. *Геометрия определяющих соотношений в группах.* — М.: Наука, 1989.

References (Tiling groups):

1. J. Conway, J. Lagarias. Tiling with polyminoes and combinatorial group theory./ J. Combin. Theory Ser. A. 1990. V. 53, 2, 183-208.

2. W. Thurston. Conway's tiling groups. Amer. Math. Monthly. 1990. V. 97, 8, 757-773.