# Замощения. Задачи. (по занятиям Кожевникова)

1.1. Фигурка $F$ получается из единичного кубика приклеиванием к трем граням, имеющим общую вершину, трех единичных кубиков. Можно ли параллелепипед $6 \times 7 \times 10$ разбить на такие фигурки?

1.2. Доска $8 \times 8$ разбита на доминошки. Докажите, что число вертикальных (горизонтальных) доминошек четно.

1.3. Доску $9 \times 9$ разбиваем на квадраты $2 \times 2$, уголки из трех клеток и $Z$-тетрамино ($Z$-тетрамино получается из прямоугольника $2 \times 3$ стиранием двух противоположных угловых клеток). Какое наименьшее количество уголков потребуется?

2.1 Можно ли доску $5 \times 7$ покрыть в несколько слоев уголками из трех клеток? ("Антифигурки"не допускаются.)

2.2 Правильный треугольник со стороной $n-1$ разбит на правильные треугольнички со стороной 1. При каких $n$ узлы полученной треугольной решетки можно покрыть в несколько слоев тройками узлов, образующих правильный треугольник со стороной 1? ("Антифигурки"допускаются.)

2.3 Сформулируйте и докажите критерий покрытия в несколько слоев в случае если "антифигурки"а) допускаются; б) не допускаются.

3.1 В таблице $8 \times 8$ расставлены плюсы и минусы. Изначально во всех клетках, кроме одной клетки $A$, записаны плюсы. За одну операцию можно поменять знак одновременно в клетках строки, столбца или диагонали (в том числе неглавной). При каких положениях клетки $A$ за несколько операций можно получить такблицу из одних плюсов?

3.2 Дана система лампочек, каждая может находиться в одном из двух состояний: "вкл."и "выкл.". Некоторые пары лампочек соединены проводом. За одну операцию можно одновременно изменить состояние некоторой лампочки $A$ и всех лампочек, соединенных с $A$. Изначально все лампочки выключены. Докажите, что за несколько операций можно включить все лампочки.

4.1 Дана бесконечная клетчатая полоска. $p$ — простое число. Фигурка $F$ есть объединение клеток с номерами $0 = a_1, a_2, \ldots, a_p$, причем НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_p) = 1$. Полоска покрыта транслятами фигурки $F$. Докажите, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ дают разные остатки по модулю $p$.

5.1 Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате $2 \times 2$ одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких $n$ за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

5.2 В клетках бесконечного листа клетчатой бумаги записаны действительные числа. Рассматриваются две фигуры, каждая из которых состоит из конечного числа клеток. Фигуры разрешается перемещать параллельно линиям сетки на целое число клеток. Известно, что для любого положения первой фигуры сумма чисел, записанных в накрываемых ею клетках, положительна. Докажите, что существует положение второй фигуры, при котором сумма чисел в накрываемых ею клетках положительна.

5.3 В некоторых целочисленных узлах первого квадранта $\{(x, y)\,|\,x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ стоят фишки, причём расположение фишек можно преобразовывать так: в случае если узлы $(a, b+1)$ и $(a+1, b)$ свободны, а узел $(a, b)$ занят фишкой, можно снять фишку с узла $(a, b)$ и поставить две фишки в узлы $(a, b+1)$ и $(a+1, b)$. Вначале есть 6 фишек в узлах $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$. Можно ли указанными операциями освободить от фишек все эти узлы?

**References**:

1. А. Белов-Канель, И. Иванов-Погодаев, А. Малистов, И. Митрофанов, М. Харитонов. Замощения, раскраски и плиточные группы. (Материалы летней конференции турнира городов)
`http://www.turgor.ru/lktg/2009/4/index.php`
(плюс см. ссылки на статьи там!)

2. И. Богданов, Г. Челноков. Алгебра паркетов. (из сборника "Летние конференции Турнира городов. — М. МЦНМО, 2009.")

3. С. Табачников, Д. Фукс. Математический дивертисмент. — М.: МЦНМО, 2011.

4. F. Ardila, R. Stanley. Tilings.
`http://www.claymath.org/library/senior_scholars/stanley_ardila_tilings.pdf`