

Задачи к курсу “Асимптотические задачи комбинаторики”

В. А. Клепцына, листок 4

Прологарифмируем и поделим на n бином Ньютона:

$$\log(1+x) = \frac{1}{n} \log(1+x)^n = \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right). \quad (1)$$

Задача 1. Какую оценку сверху для $\binom{n}{k}$ при любом x даёт (1)?

Ответ. $\log(1+x) \geq \frac{1}{n} \log \binom{n}{k} + \frac{k}{n} \log x$.

Задача 2. Нарисуйте кривую γ на плоскости (u, v) , образуемую парами $(\log x, \log(1+x))$, и проверьте, что эта кривая — выпуклая.

Задача 3. Напишите уравнение касательной к γ , имеющей коэффициент наклона $p = \frac{k}{n}$. Какую оценку для $\frac{1}{n} \log \binom{n}{k}$ даёт эта касательная?

Ответ. Точка касания $x = \frac{p}{1-p}$. Уравнение касательной $u = pv - p \log p - (1-p) \log(1-p)$. Соответственно, полученная оценка

$$\frac{1}{n} \log \binom{n}{k} \leq -p \log p - (1-p) \log(1-p). \quad (2)$$

Задача 4. Оцените сверху $\left| \frac{1}{n} \log \left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k'}} \right) \right|$. Учтывая, что максимальное из слагаемых в правой части (1) отличается от всей суммы в не больше, чем n раз, покажите, что оценка (2) асимптотически точна (в асимптотике $k = [np]$, $n \rightarrow \infty$).

Определение 1. Пусть на $V = \mathbb{R}^m$ (или на его выпуклом подмножестве M) задана выпуклая функция $f(u)$. Её преобразование Лежандра называется функцией g на $\mathbb{R}^m = V^*$, определённая как

$$g(v) = \max_{u \in V} uv - f(u)$$

(если функция f была определена на M , то максимум берётся по $u \in M$).

Задача 5. Пусть

$$H : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l, \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} - V(x).$$

Рассмотрим преобразование Лежандра функции H по переменной p (считая переменную x параметром). Найдите явный вид получающейся функции $L(x, v)$.

Задача 6. Напишите уравнения Эйлера–Лагранжа для экстремали функционала

$$\mathcal{L}(f) = \int L(f(t), \dot{f}(t)) dt,$$

где функция $L(x, v)$ это ответ в предыдущей задаче. Сравните их с законами движения материальной точки массы m в потенциальном поле сил с потенциалом $V(x)$.

Задача 7. Как связано преобразование Лежандра с проективной двойственностью?