Задачи к курсу “Асимптотические задачи комбинаторики” В. А. Клепцына, листок 3

Задача 1. Пусть на плоскости задан параллелограмм $\Pi = ABCD$ площади S. Рассмотрим множество $M_n \subset \Pi^n$, заданное как

$$M_n := \{(P_1, \ldots, P_n) \in \Pi^n \mid AP_1 \ldots P_n C \text{ — выпуклая вверх ломаная}\}.$$

Найдите $2n$-мерный объём $V_n := \mathrm{vol}_{2n}(M_n)$.

Ответ. $V_n = \frac{1}{n!^3(n+1)} S^n$.

Задача 2. Выберем единицу длины δ. При каком $n = n_{\max}$ значение V_n/δ^{2n} максимально? Найдите асимптотику $V_{n_{\max}}/\delta^{2n}$ при $\delta \to 0$.

Ответ. $c\,\delta^{5/3}\exp(3\sqrt[3]{S/\delta^2})$

Задача 3. Пусть внутри параллелограмма $ABCD$ проведен отрезок PQ. Сравните при $\delta \to 0$ “условный” “объём” (в единицах δ^{2n}) проходящих через этот отрезок выпуклых вверх ломаных, начинающихся в A и заканчивающихся в C, с полным “объёмом” V_n. Когда этот условный объём максимален?

Задача 4. Пусть задана выпуклая кривая γ. Рассмотрим “ожерелье” параллелограммов, имеющих общие внешние стороны, приближающее γ: см. рис. 1

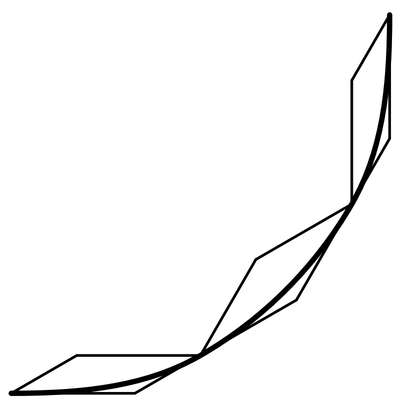

Рис. 1: Ожерелье параллелограммов

Как ведёт себя при уменьшении размера параллелограммов сумма кубических корней из их площадей?

Определение 1. *Аффинной длиной* выпуклой кривой γ называется величина

$$\mathrm{AffL}(\gamma) := \int_\gamma \kappa(s)^{1/3}\,ds,$$

где κ — кривизна, а s — натуральный параметр.

Задача 5. Докажите, что аффинная длина сохраняется под действием сохраняющих площадь аффинных преобразований. Как она изменяется под действием произвольного аффинного преобразования?

Задача 6. Докажите, что для кривой-графика функции $y = y(x)$ аффинная длина задаётся также как
$$\mathrm{AffL}(\gamma) = \int (y''(x))^{1/3}\,dx.$$

Задача 7. Докажите, что экстремали функционала аффинной длины — параболы, а условные экстремали при условии фиксированной ограничиваемой площади — все кривые второго порядка.

Указание. Можно это проверять явно выполнение уравнения Эйлера–Лагранжа, но можно найти обходной путь. А именно: из центральной симметрии несложно проверить, что окружность оказывается экстремалью для задачи с фиксированным объёмом. В силу аффинной инвариантности экстремалью будут и эллипсы. Множитель Лагранжа при этом оказывается связан с площадью — причём оказывается её отрицательной степенью. Унося одну точку эллипса на бесконечность, получаем в пределе параболу, причём множитель Лагранжа обращается в ноль. Значит, парабола — экстремаль функционала аффинной длины в задаче без ограничения на объём.

Задача 8. Как устроена выпуклая вверх кривая, лежащая внутри единичного квадрата, соединяющая (0,1) и (1,0) и максимизирующая аффинную длину? А как — максимизирующая аффинную длину замкнутая выпуклая кривая, лежащая в том же единичном квадрате? А в правильном треугольнике?