Случайные блуждания на плоскости и их пределы: простое случайное блуждание, LERW и SAW

Ольга Ромаскевич, Дмитрий Челкак

Задачи к первой лекции: случайные блуждания в размерностях 1, 2 и 3.

"A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever."
Shizuo Kakutani

1. Случайное блуждание на прямой. Беспечный кузнечик прыгает по целочисленной прямой, на единицу влево с (фикисрованной) вероятностью $p \in (0;1)$ или же на единицу вправо с вероятностью $q = 1-p$. Нас интересуют две величины:

(i) вероятность возврата в начало координат: какие шансы у кузнечика хотя бы раз оказаться в начале координат, если он стартует из заданной точки $n \in \mathbb{Z}$?

(ii) вероятности выхода из заданного отрезка $[-N;M]$*:* каковы шансы, что кузнечик окажется в точке M прежде чем в точке $-N$, если он стартует из начала координат.

1a. Обозначим через $f_n^{(k)}$ вероятность хотя бы раз побывать в начале координат в течение первых $k \in \mathbb{N}_0$ шагов, стартуя из точки $n \in \mathbb{Z}$, и пусть $f_n := \lim_{k\to+\infty} f_n^{(k)}$ (почему такой предел существует?). Наконец, пусть $h_n := 1 - f_n$ обозначает вероятность "заблудиться", т.е. ни разу не оказаться в 0, стартуя из точки n (в частности, $h_0 = 0$). Докажите, что

$$h_n = p \cdot h_{n-1} + q \cdot h_{n+1}, \quad n \neq 0. \tag{1}$$

1b. Пусть $p = q = \frac{1}{2}$. Выведите из (1), что $h_n \equiv 0$, используя тот факт, что $\forall n\ h_n \in [0,1]$.

1c. Пусть $p > q$, т.е. кузнечик предпочитает прыгать налево. Докажите, что $h_n = 0$, и найдите h_{-n} для $n \geqslant 0$ (*подсказка:* для того чтобы выбрать правильное решение (1), докажите по индукции, что $f_{-n}^{(k)} \leqslant \lambda^n$ для некоторого $\lambda < 1$, а значит $\lim_{n\to\infty} h_{-n} = 1$).

1d. Докажите, что уравнение (1) выполняется для последовательности $(g_n)_{-N\leqslant n\leqslant M}$ вероятностей оказаться в точке M раньше чем в $-N$, стартуя из точки n. Выведите отсюда, что $g_0 = M/(N+M)$ в случае симметричного блуждания $p = q = \frac{1}{2}$, и найдите формулу для общего случая $p \neq q$.

2. Случайное блуждание на плоскости. Рассмотрим симметричное блуждание на двумерной бесконечной решетке $\mathbb{Z}^2$: в каждый момент времени пьяница делает шаг в одном из четырех направлений с одинаковой вероятностью $\frac{1}{4}$. Аналогично одномерному случаю, определим $f_{n,m}$ – вероятность хотя бы раз попасть в начало координат, начиная в точке $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, и пусть $h_{n,m} := 1 - f_{n,m}$ – дополнительная вероятность, то есть вероятность "заблудиться" (ни разу не побывать в начале координат), стартовав из (n,m).

2a. Проверьте, что $h_{0,0} = 0$, $h_{m,n} = h_{n,m} = h_{|n|,|m|}$ для всех $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, и

$$h_{n,m} = \tfrac{1}{4}(h_{n-1,m} + h_{n+1,m} + h_{n,m-1} + h_{n,m+1}), \quad (n,m) \neq (0,0). \tag{2}$$

2b. Докажите свойство монотонности: $h_{n',m'} \geqslant h_{n,m}$, если $n' \geqslant n \geqslant 0$ и $m' \geqslant m \geqslant 0$. *Подсказка:* примените индукцию по k, сначала доказывая аналогичное свойство для $f_{n,m}^{(k)}$. Чтобы преодолеть возникающие осложнения, вызванные соображениями четности, вместо исходного рассмотрите "ленивое" случайное блуждание, которое с вероятностью $\frac{1}{5}$ переходит в каждую из соседних точек, а с вероятностью $\frac{1}{5}$ остается на месте (почему $f_{n,m}$ не меняется при переходе к "ленивому" случайному блужданию?).

2c. Положим $c := h_{1,0} = h_{0,1} = h_{-1,0} = h_{0,-1}$, и пусть $S_N := \sum_{\max|n|,|m|=N} h_{n,m}$ обозначает сумму величин $h_{n,m}$ вдоль границы квадрата $[-N,N]^2$. Выведите из (2), что

$$(S_{N+1} - 4h_{N+1,N+1}) - (S_N + 4h_{N,N}) = 4c \quad \forall N \geqslant 0.$$

2d. Используя свойство монотонности $h_{n,m}$, докажите теперь, что

$$\frac{S_{N+1}}{8(N+1)} \geqslant \frac{S_N}{8N} + \frac{c}{2(N+1)}.$$

Выведите отсюда и из ограниченности функции $h_{n,m}$, что $h_{1,0} = c = 0$.

2e. Завершите доказательство того, что $h_{n,m} = 0$ для всех $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. Другими словами, *случайное блуждание на плоскости $\mathbb{Z}^2$, запущенное из заданной вершины, рано или поздно обязательно (т.е., с вероятностью 1) попадет в начало координат.*

3$^{(*)}$. ***Случайное блуждание в пространстве.*** Рассмотрим случайный полет шмеля в пространстве $\mathbb{Z}^3$: находясь в некоторой вершине, за один шаг шмель равновероятно перелетает в одну из шести соседних вершин. Докажите, что существует такая функция $g_{n,m,l}$, $(n,m,l) \in \mathbb{Z}^3$, что $1 = g_{0,0,0} > g_{n,m,l} > 0$ для всех $(n,m,l) \neq (0,0,0)$, и

$$g_{n,m,l} \geqslant \frac{1}{6}(g_{n-1,m,l} + g_{n+1,m,l} + g_{n,m-1,l} + g_{n,m+1,l} + g_{n,m,l-1} + g_{n,m,l+1}) \tag{3}$$

для всех $(n,m,l) \in \mathbb{Z}^3$. Для этого:

3a. Поэкспериментируйте с функциями $g_{n,m,l} := r^{-\alpha}$, где $r = (n^2+m^2+k^2)^{1/2}$, а параметр α принимает значения, близкие к 1. Проверьте при помощи формулы Тейлора, что (3) выполняется для всех *достаточно больших* значений $r \geqslant R_0 = R_0(\alpha)$, если $0 < \alpha < 1$.

3b. Докажите, что g можно так переопределить в конечном числе вершин около начала координат (для которых $r \leqslant R_0$), чтобы (3) выполнялось для *всех* (n,m,l). После этого рассмотрите новую функцию $g_{n,m,l}/g_{0,0,0}$, которая по-прежнему удовлетворяет неравенству (3) всюду в $\mathbb{Z}^3$ и принимает значение 1 в начале координат.

3c. Докажите, что для "вероятности заблудиться" $h_{n,m,l}$, определенной так же, как и раньше, верно $h_{n,m,l} \geqslant 1 - g_{n,m,l} > 0$, $(n,m,l) \neq (0,0,0)$. Другими словами, *случайное блуждание в пространстве $\mathbb{Z}^3$, запущенное из вершины, не совпадающей с началом координат, с ненулевой вероятностью никогда в начало координат не попадет.*

4. ***Гармонические функции.*** Эта (важная для понимания второй лекции!) задача посвящена непрерывному аналогу функций, заданных на квадратной решетке $\mathbb{Z}^2$ и удовлетворяющих соотношению (2). Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, заданная в плоской области (открытом подмножестве плоскости) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, называется *гармонической*, если она дважды дифференцируема и ее *лапласиан* Δu равен нулю всюду в области:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

4a. Проверьте, что функции $\arg(x+iy) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ и $\log r = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ – гармонические.

4b. Запишите лапласиан в полярной системе координат: для этого посчитайте, чему равны вторые частные производные по x и по y в координатах r и φ, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Выведите отсюда, что лапласиан инвариантен относительно вращений.

4c$^{(*)}$**.** Проверьте, что для функции $r^{-1} = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, заданной в *трехмерном* пространстве, верно $\Delta r^{-1} = 0$, где $\Delta u := \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2$, и что $\Delta r^{-\alpha} < 0$, если $0 < \alpha < 1$. Этот факт объясняет конструкцию, использованную в задаче 3a.