Задачи по курсу Р. С. Авдеева и А. И. Буфетова «Спиноры»

Листок 3. Спинорные группы и спинорные представления

Задача 1. Пусть $V = \mathbb{R}^3$ и $Q(v,v) = -x^2 - y^2 - z^2$ для всякого вектора v с координатами (x,y,z). Тогда мы знаем, что $\mathrm{Cl}^+(V,Q) \simeq \mathbb{H}$. Докажите, что для всякого $q \in \mathbb{H}$ с условием $||q|| = 1$ существуют такие векторы $v_1, v_2 \in V$, что в алгебре $\mathrm{Cl}(V,Q)$ выполняются соотношения $v_1^2 = v_2^2 = -1$ и $q = v_1 v_2$.

Задача 2. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$ и $Q(v,v) = -x_1^2 - \ldots - x_n^2$ для всякого вектора $v \in V$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Докажите, что

$$\mathrm{Spin}(V,Q) = \{x \in \mathrm{Cl}^+(V,Q) \mid x \cdot V \cdot x^* \subset V \text{ и } x \cdot x^* = 1\}.$$

В оставшихся задачах при каждом n рассматривается векторное пространство $V = \mathbb{C}^n$ с формой Q, заданной формулой $Q(v,v) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ для всякого вектора v с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Соответствующая алгебра Клиффорда обозначается символом $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$, а соответствующая спинорная группа — символом $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$.

Задача 3. Докажите, что $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Cl}^+_{n+1}(\mathbb{C})$ для всякого натурального n.

Задача 4. (Явная реализация спинорных представлений)

(а) Пусть $n = 2k$. Выберем в V базис $f_{-k}, \ldots, f_{-1}, f_1, \ldots, f_k$ так, чтобы выполнялись равенства $Q(f_{-i}, f_i) = Q(f_i, f_{-i}) = 1$ и $Q(f_i, f_j) = 0$ при $j \neq -i$. Зафиксируем в алгебре $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ элемент $u = f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$ и обозначим буквой S подпространство в $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$, порождённое всеми элементами вида $a \cdot u$, где $a \in \mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$. Докажите, что $\dim S = 2^k$ и что действие $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ на S умножениями слева определяет изоморфизм $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}(S)$.

(б) Пусть $n = 2k+1$. Выберем в V базис $f_{-k}, \ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_k$ так, чтобы выполнялись равенства $Q(f_{-i}, f_i) = Q(f_i, f_{-i}) = 1$ при $i \neq 0$, $Q(f_0, f_0) = -1$ и $Q(f_i, f_j) = 0$ при $j \neq -i$. Зафиксируем в алгебре $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ элемент

$$u = \begin{cases} f_1 \cdot \ldots \cdot f_k, & \text{если } k \text{ чётно;} \\ f_0 \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_k, & \text{если } k \text{ нечётно,} \end{cases}$$

и обозначим буквой S подпространство в $\mathrm{Cl}^+_n(\mathbb{C})$, порождённое всеми элементами вида $a \cdot u$, где $a \in \mathrm{Cl}^+_n(\mathbb{C})$. Докажите, что $\dim S = 2^k$ и что действие $\mathrm{Cl}^+_n(\mathbb{C})$ на S умножениями слева определяет изоморфизм $\mathrm{Cl}^+_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}(S)$.

Задача 5. Пусть $n = 3$. Докажите, что группа $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{C})$ изоморфна группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (группа всех (2×2)-матриц с определителем 1), а её спинорное представление задаётся обычным действием группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ линейными преобразованиями пространства $\mathbb{C}^2$.