Задачи по курсу Р. С. Авдеева и А. И. Буфетова «Спиноры»

Листок 2. Алгебры Клиффорда и ортогональные группы

В тех случаях, когда не имеет значения, с какими числами мы работаем — действительными или комплексными, — мы будем писать $\mathbb{K}$ вместо $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пусть V — векторное пространство размерности n, и пусть на V задана симметричная билинейная форма Q, то есть отображение $V \times V \to \mathbb{K}$, линейное по каждому аргументу.

Алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(V, Q)$ определяется как ассоциативная алгебра с единицей, содержащая V как подпространство и порождённая им, в которой

$$v \cdot w + w \cdot v = 2Q(v, w) \cdot 1 \text{ для любых } v, w \in V, \tag{1}$$

а любые другие соотношения между элементами из V выражаются через соотношения (1).

Задача 1. Докажите, что соотношения (1) эквивалентны соотношениям

$$v \cdot v = Q(v, v) \cdot 1 \text{ для всякого } v \in V, \tag{2}$$

то есть соотношения (1) выражаются через соотношения (2) и наоборот.

Задача 2. Докажите, что если билинейная форма Q тождественно равна нулю, то алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(V, Q)$ изоморфна алгебре Грассмана (то есть внешней алгебре) пространства V.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в V. Для каждого подмножества $I \subset \{1, \ldots, n\}$ введём элемент $e_I \in \mathrm{Cl}(V, Q)$ следующим образом. Если $I = \varnothing$, то положим $e_I = 1$. В противном случае $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $i_1 < \ldots < i_k$, и мы полагаем $e_I = e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}$.

Задача 3. Докажите, что элементы e_I, где I пробегает все подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, образуют базис алгебры $\mathrm{Cl}(V, Q)$. В частности, $\dim \mathrm{Cl}(V, Q) = 2^n$.

Пусть $\mathrm{Cl}^+(V, Q)$ (соответственно $\mathrm{Cl}^-(V, Q)$) — подпространство в $\mathrm{Cl}(V, Q)$, порождённое всеми векторами e_I, где $|I|$ чётно (соответственно нечётно). Тогда имеется разложение

$$\mathrm{Cl}(V, Q) = \mathrm{Cl}^+(V, Q) \oplus \mathrm{Cl}^-(V, Q).$$

Задача 4. Докажите, что подпространства $\mathrm{Cl}^+(V, Q)$ и $\mathrm{Cl}^-(V, Q)$ не зависят от выбора базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V.

Задача 5. Положим для краткости $C^+ = \mathrm{Cl}^+(V, Q)$, $C^- = \mathrm{Cl}^-(V, Q)$. Докажите, что $C^+ \cdot C^+ \subset C^+$, $C^+ \cdot C^- \subset C^-$, $C^- \cdot C^+ \subset C^-$, $C^- \cdot C^- \subset C^+$.

Обозначим через $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ алгебру квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$.

Если Q — симметричная билинейная форма на $\mathbb{C}^n$, принимающая на векторах с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ значение $x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, то будем писать $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ вместо $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n, Q)$.

Задача 6. Докажите, что имеются следующие изоморфизмы:
(а) $\mathrm{Cl}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$;
(б) $\mathrm{Cl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;
(в)* $\mathrm{Cl}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

Пусть $n = p + q$, где $0 \leqslant p, q \leqslant n$. Если Q — симметричная билинейная форма на $\mathbb{R}^n$, принимающая на векторах с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ значение $x_1y_1 + \ldots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \ldots - x_ny_n$, то будем писать $\mathrm{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ вместо $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n, Q)$.

Задача 7. Докажите, что имеются следующие изоморфизмы:
(а) $\mathrm{Cl}_{1,0}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$;
(б) $\mathrm{Cl}_{0,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$;
(в) $\mathrm{Cl}_{2,0}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;
(г) $\mathrm{Cl}_{1,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;
(д) $\mathrm{Cl}_{0,2}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}$.

Задача 8. Докажите, что $\mathrm{Cl}_{n+2}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Cl}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Cl}_2(\mathbb{C})$.

Задача 9. Докажите, что имеются следующие изоморфизмы:
(а) $\mathrm{Cl}_{2m}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Mat}_{2^m}(\mathbb{C})$;
(б) $\mathrm{Cl}_{2m+1}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Mat}_{2^m}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^m}(\mathbb{C})$.

Центром алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(V, Q)$ называется множество

$$Z(\mathrm{Cl}(V,Q)) = \{z \in \mathrm{Cl}(V,Q) \mid zu = uz \text{ для всех } u \in \mathrm{Cl}(V,Q)\}.$$

Это множество является линейным подпространством в $\mathrm{Cl}(V, Q)$.

Задача 10. Пусть C — любая из алгебр $\mathrm{Cl}_n(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Cl}_{n,0}(\mathbb{R})$. Докажите, что:
(а) если $n = 2m$, то $Z(C) = \mathbb{K} \cdot 1$;
(б) если $n = 2m+1$, то $Z(C) = \mathbb{K} \cdot 1 + \mathbb{K} \cdot e_1 \ldots e_n$, где $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортогональный базис в $\mathbb{K}^n$.

Пусть снова задано векторное пространство V размерности n, и пусть Q — симметричная билинейная форма на Q, определяемая формулой $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Обозначим через $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ группу невырожденных линейных преобразований пространства V, сохраняющих форму Q. Иными словами,

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{K}) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(V) \mid Q(v,w) = Q(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) \text{ для любых } v, w \in V\}.$$

Вектор $v \in V$ назовём *изотропным*, если $Q(v, v) = 0$, и *неизотропным*, если $Q(v, v) \neq 0$. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то всякий ненулевой вектор неизотропен.

С каждым неизотропным вектором $v \in V$ связано *отражение*, то есть линейное преобразование r_v пространства V, определяемое формулой

$$r_v(w) = w - \frac{2Q(w,v)}{Q(v,v)}v$$

для всякого вектора $w \in V$.

Задача 11. Докажите, что всякое отражение является элементом группы $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$.

Задача 12. Пусть $w_1, w_2 \in V$ — неизотропные векторы, удовлетворяющие условию $Q(w_1, w_1) = Q(w_2, w_2)$. Докажите, что существует отражение, переводящее w_1 либо в w_2, либо в $-w_2$.

Задача 13. Докажите, что всякий элемент группы $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ является произведением конечного числа отражений.