Задачи по курсу Р. С. Авдеева и А. И. Буфетова «Спиноры»

Листок 1. Кватернионы и вращения трёхмерного пространства

Хорошо известно, что комплексные числа получаются путём добавления к действительным числам *мнимой единицы* — элемента i со свойством $i^2 = -1$. При этом всякое комплексное число записывается в виде $a+bi$ для некоторых действительных чисел a, b.

Кватернионы получаются из действительных чисел похожей конструкцией, только в этом случае добавляются сразу три мнимых единицы i, j, k. Каждая из них по-прежнему в квадрате даёт минус единицу: $i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1$. С действительными числами эти мнимые единицы коммутируют:

$$1 \cdot i = i = i \cdot 1, \qquad 1 \cdot j = j = j \cdot 1, \qquad 1 \cdot k = k = k \cdot 1.$$

А вот между собой мнимые единицы перемножаются по следующим правилам:

$$i \cdot j = k, \qquad j \cdot i = -k, \qquad j \cdot k = i, \qquad k \cdot j = -i, \qquad k \cdot i = j, \qquad i \cdot k = -j.$$

Из этих соотношений видно, что умножение кватернионов не коммутативно.

Всякий кватернион записывается в виде $a + bi + cj + dk$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Множество всех кватернионов обозначается через $\mathbb{H}$.

Для всякого кватерниона $q = a + bi + cj + dk$ кватернион $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ называется *сопряжённым* к q.

Задача 1. Пусть q_1 и q_2 — два кватерниона. Как связан кватернион $\overline{q_1 \cdot q_2}$ с $\overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$?

Задача 2. Докажите, что для всякого ненулевого кватерниона q произведение $q \cdot \overline{q}$ является положительным действительным числом.

Для всякого кватерниона q число $||q|| = \sqrt{q \cdot \overline{q}}$ называется его *нормой.*

Задача 3. Докажите, что для всякой пары кватернионов q_1, q_2 верны следующие соотношения:

(а) $||q_1 \cdot q_2|| = ||q_1|| \cdot ||q_2||$;

(б) $||q_1 + q_2|| \leqslant ||q_1|| + ||q_2||$.

Задача 4. Докажите, что всякий ненулевой кватернион q обратим, то есть существует такой кватернион q', что $q \cdot q' = 1$.

Задача 5. Пусть $V \subset \mathbb{H}$ — трёхмерное подпространство, натянутое на мнимые единицы i, j, k.

(а) Докажите, что если $q \in \mathbb{H}$ и $v \in V$, то $qv\overline{q} \in V$.

Наделим V структурой евклидова пространства, предполагая i, j, k попарно ортогональными и единичной длины (заметим, что для всякого элемента $v \in V$ его норма как кватерниона совпадает с длиной по отношению к нашей евклидовой структуре на V).

(б) Докажите, что если $q \in \mathbb{H}$ — кватернион единичной нормы, то преобразование $v \mapsto qv\overline{q}$ является вращением пространства V.

(в)* Найдите ось и угол этого вращения.