Лекции курса Р. С. Авдеева и А. И. Буфетова «Спиноры»

Лекция 3

Пусть V — векторное пространство размерности n, а $(e_1, \ldots, e_n)$ — его базис. Пусть Q — стандартная симметричная билинейная форма на V, то есть $Q(v, v) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ для всякого вектора $v \in V$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$.

Докажем утверждение о порождении группы $\mathrm{O}(V, Q)$ отражениями.

Предложение 1. *Всякий элемент группы* $\mathrm{O}(V, Q)$ *представим в виде произведения конечного числа отражений.*

Прежде всего докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть* $v, w \in V$ *— два вектора, удовлетворяющих условиям* $Q(v, v) = Q(w, w) \neq 0$. *Тогда* w *можно перевести в* v *композицией не более чем двух отражений.*

Доказательство. Из условия вытекает, что хотя бы один из векторов $v - w$ или $v + w$ неизотропен. Если $Q(v - w, v - w) \neq 0$, то $r_{v-w}(w) = v$, и тогда w переводится в v одним отражением. Если же $Q(v + w, v + w) \neq 0$, то $r_{v+w}(w) = -v$, и тогда $v = r_v(r_{v+w}(w))$. $\square$

Доказательство предложения 1. Действуем индукцией по n. При $n = 1$ имеем $\mathrm{O}(V, Q) = \{\pm 1\}$, где -1 — это преобразование $v \mapsto -v$. Легко видеть, что $-1 = r_{e_1}$. Пусть теперь n любое и g — произвольное ортогональное преобразование пространства V. Положим $f_1 = g(e_1)$. По лемме 1 имеем $e_1 = h(f_1)$, где h — произведение не более чем двух отражений. Отсюда преобразование $h \circ g$ переводит в себя вектор e_1, а также ортогональную ему гиперплоскость V'. Действие элемента $h \circ g$ на V' определяет элемент h' группы $\mathrm{O}(V', Q')$ (где Q' — ограничение формы Q на V'), который по предположению индукции является произведением конечного числа отражений. Значит, элемент $g = h^{-1} \circ h'$ тоже представим в виде произведения конечного числа отражений. $\square$

Теперь мы снова построим спинорную группу, чуть-чуть модифицировав конструкцию из прошлой лекции.

Введём новую симметричную билинейную форму $Q' = -Q$, то есть $Q'(v, v) = -x_1^2 - \ldots - x_n^2$ для всякого вектора $v \in V$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Легко проверить, что $\mathrm{O}(V, Q) = \mathrm{O}(V, Q')$ и $\mathrm{SO}(V, Q) = \mathrm{SO}(V, Q')$. Всякий элемент $q \in V$ с условием $q^2 = -1$ определяет линейное преобразование σ пространства V по формуле $v \mapsto qvq$. Вычисление показывает, что $\sigma(q) = r_q$. Определим теперь спинорную группу $\mathrm{Spin}(V, Q')$ следующим образом:

$$\mathrm{Spin}(V, Q') = \{q_1 \cdot \ldots \cdot q_{2s} \mid q_i \in V, q_i^2 = -1 \text{ для всех } i = 1, \ldots, 2s\} \subset \mathrm{Cl}^+(V, Q').$$

Группа $\mathrm{Spin}(V, Q')$ действует на V по формуле $v \mapsto xvx^*$, где $v \in V$, $x \in \mathrm{Spin}(V, Q')$, при этом элемент $x = q_1 \cdot \ldots \cdot q_{2s}$ действует в V как произведение отражений $r_{q_1} \cdot \ldots \cdot r_{q_{2s}}$. Таким образом, у нас имеется гомоморфизм групп $\rho\colon \mathrm{Spin}(V, Q') \to \mathrm{SO}(V, Q')$. Те же рассуждения, что и в прошлой лекции, показывают, что гомоморфизм ρ сюръективен, а его ядро совпадает с множеством $\{\pm 1\}$.

Пусть U — трёхмерное подпространство в $\mathbb{H}$, натянутое на мнимые единицы i, j, k. Пусть G — подгруппа в $\mathbb{H}$ (относительно умножения), состоящая из всех кватернионов с нормой 1. Действие группы G на U по формуле $u \mapsto qu\bar{q}$, где $u \in U$, $q \in G$, задаёт гомоморфизм из G в группу всех невырожденных линейных преобразований пространства V. При этом оказывается (см. задачу 5 листка 1 с задачами), что образом является группа $\mathrm{SO}(U, Q)$ (где Q — стандартная форма на U), а ядро равно $\{\pm 1\}$. Покажем, что эта конструкция является частным случаем приведённой выше конструкции спинорной группы.

Пусть $V = \mathbb{R}^3$, а Q' — симметричная билинейная форма, заданная формулой $Q(v, v) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ для всякого вектора v с координатами (x_1, x_2, x_3). Тогда в качестве базиса алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(V, Q')$ можно взять элементы

$$1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_1e_2,\ e_2e_3,\ e_3e_1,\ e_1e_2e_3.$$

Отображение $\varphi\colon i \mapsto e_1e_2,\ j \mapsto e_2e_3,\ k \mapsto e_3e_1$ устанавливает естественный изоморфизм между $\mathbb{H}$ и $\mathrm{Cl}^+(V, Q')$. Заметим, что при этом сопряжению в $\mathbb{H}$ соответствует операция $*$ в $\mathrm{Cl}(V, Q')$. Покажем, что отображение φ отождествляет группу G с группой $\mathrm{Spin}(V, Q')$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Для всякого $q \in \mathbb{H}$ с условием $||q|| = 1$ существуют такие векторы $v_1, v_2 \in V$, что в алгебре $\mathrm{Cl}(V, Q')$ выполняются соотношения $v_1^2 = v_2^2 = -1$ и $q = v_1v_2$.*

Упражнение 1. Докажите эту лемму.

Из леммы 2 моментально вытекает, что образ в $\mathrm{Cl}^+(V, Q')$ группы G содержится в группе $\mathrm{Spin}(V, Q')$. С другой стороны, из определения группы $\mathrm{Spin}(V, Q')$ следует, что всякий её элемент представим в виде произведения конечного числа кватернионов единичной нормы и тем самым сам является кватернионом единичной нормы, откуда по лемме 2 он лежит в образе группы G.

Пусть W — трёхмерное подпространство в $\mathrm{Cl}^+(V, Q')$, порождённое элементами e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1.

Конструкция группы $\mathrm{Spin}(V, Q')$ включает в себя действие группы $\mathrm{Spin}(V, Q')$ на пространстве V, задаваемое формулой $v \mapsto xvx^*$, где $v \in V$, $x \in \mathrm{Spin}(V, Q')$. С другой стороны, действие G на U определяет при помощи изоморфизма φ действие $\mathrm{Spin}(V, Q')$ на W по той же самой формуле: $w \mapsto xwx^*$, где $w \in W$, $x \in \mathrm{Spin}(V, Q')$ (напомним, что $\varphi(\overline{q}) = \varphi(q)^*$ для всякого $q \in \mathbb{H}$).

Нам осталось отождествить пространства V и W. Для этого вспомним, что в центре алгебры $\mathrm{Cl}(V, Q')$ содержится элемент $z = e_1e_2e_3$. Теперь зададим отображение $V \to W$ формулой $v \mapsto v \cdot z$. Легко проверить, что это изоморфизм. Формула $x(v \cdot z)x^* = (xvx^*) \cdot z$, где $x \in \mathrm{Spin}(V, Q')$ и $v \in V$, показывает, что группа $\mathrm{Spin}(V, Q')$ одинаково действует на V и W.

Итак, мы показали, что действие группы G на U получается как частный случай общей конструкции спинорных групп.

Мы переходим к последней части нашей лекции, которая посвящена спинорным представлениям.

С этого момента мы будем работать только с комплексными векторными пространствами.

Пусть $V = \mathbb{C}^n$, а $Q(v, v) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ для всякого вектора $v \in V$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Упростим наши обозначения, используя запись Cl_n вместо $\mathrm{Cl}(V, Q)$ и Spin_n вместо $\mathrm{Spin}(V, Q)$.

Предложение 2. *Для всякого n имеется изоморфизм алгебр $\mathrm{Cl}_n \simeq \mathrm{Cl}^+_{n+1}$.*

Доказательство. Рассмотрим ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{C}^n$ как часть ортонормированного базиса $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Определим отображение $\mathrm{Cl}_n \to \mathrm{Cl}_{n+1}^+$, задав его на базисных элементах следующим образом:

$$e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_s} \mapsto \begin{cases} e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_s}, & \text{если } s \text{ чётно;} \\ \sqrt{-1} e_0 \cdot e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_s}, & \text{если } s \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Простая проверка показывает, что это отображение является искомым изоморфизмом алгебр (проделайте это!). □

Предложение 3. *Всякий элемент из* Cl_n^+ *представим в виде линейной комбинации элементов из группы* Spin_n.

Доказательство. Достаточно заметить, что все базисные элементы алгебры Cl_n^+ лежат в Spin_n. □

Теперь изучим структуру алгебры Cl_n.

Введём обозначение Mat_l для алгебры комплексных $(l \times l)$-матриц.

Пусть $n = 2k$. Введём новый базис $f_1, \dots, f_k, f^1, \dots, f^k$ в $\mathbb{C}^n$, положив

$$f_i = \frac{e_i + \sqrt{-1} e_{i+k}}{2}, \qquad f^i = \frac{e_i - \sqrt{-1} e_{i+k}}{2}$$

при всех $i = 1, \dots, k$. Прямая проверка показывает, что в алгебре Cl_{2k} выполняются следующие равенства:

$$f^i \circ f_i + f_i \circ f^i = 1 \qquad (i = 1, \dots, k); \tag{1}$$

$$f^i \circ f_j + f_j \circ f^i = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, k,\ i \neq j); \tag{2}$$

$$f^i \circ f^j + f^j \circ f^i = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, k); \tag{3}$$

$$f_i \circ f_j + f_j \circ f_i = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, k). \tag{4}$$

Мы видим, что эти соотношения совпадают с соотношениями, определявшими алгебру A_k из первой лекции, откуда $\mathrm{Cl}_{2k} \simeq A_k$. На первой лекции мы доказали, что $A_n \simeq \mathrm{End}(\Lambda_k)$, где Λ_k — алгебра Грассмана. Рассмотрим разложение $\Lambda_k = \Lambda_k^+ \oplus \Lambda_k^-$, где Λ_k^+ — подпространство, порождённое мономами с чётным числом переменных, а Λ_k^- — подпространство, порождённое мономами с нечётным числом переменных. Изоморфизм $\mathrm{Cl}_{2k} \simeq A_k$ определяет действие алгебры Cl_{2k} на Λ_k. Заметим, что при этом действии подалгебра Cl_{2k}^+ сохраняет каждое из подпространств Λ_k^+ и Λ_k^-, что даёт инъективный гомоморфизм алгебр $\mathrm{Cl}_{2k}^+ \to \mathrm{End}(\Lambda_k^+) \oplus \mathrm{End}(\Lambda_k^-)$. Поскольку $\dim(\mathrm{End}(\Lambda_k^+) \oplus \mathrm{End}(\Lambda_k^-)) = (2^{k-1})^2 + (2^{k-1})^2 = 2^{2k-1} = \dim \mathrm{Cl}_{2k}^+$, наш гомоморфизм на самом деле является изоморфизмом. Таким образом, $\mathrm{Cl}_{2k} \simeq \mathrm{Mat}_{2^k}$ и $\mathrm{Cl}_{2k}^+ \simeq \mathrm{Mat}_{2^{k-1}} \oplus \mathrm{Mat}_{2^{k-1}}$. Принимая во внимание предложение 2, мы окончательно получаем следующий результат.

Предложение 4. *Имеются следующие изоморфизмы:*

$$\mathrm{Cl}_{2k} \simeq \mathrm{Mat}_{2^k}, \qquad \mathrm{Cl}_{2k}^+ \simeq \mathrm{Mat}_{2^{k-1}} \oplus \mathrm{Mat}_{2^{k-1}};$$
$$\mathrm{Cl}_{2k+1} \simeq \mathrm{Mat}_{2^k} \oplus \mathrm{Mat}_{2^k}, \qquad \mathrm{Cl}_{2k+1}^+ \simeq \mathrm{Mat}_{2^k}.$$

Из этого предложения вытекает следующее:

(1) при $n = 2k$ существует изофорфизм $\mathrm{Cl}_n^+ \simeq \mathrm{End}(S^+) \oplus \mathrm{End}(S^-)$, где $S^+ = S^- = \mathbb{C}^{2^{k-1}}$;

(2) при $n = 2k + 1$ существует изоморфизм $\mathrm{Cl}_n^+ \simeq \mathrm{End}(S)$, где $S = \mathbb{C}^{2^k}$.

При $n = 2k$ положим $S = S^+ \oplus S^-$.

Поскольку $\mathrm{Spin}_n \subset \mathrm{Cl}_n^+$, действие алгебры Cl_n^+ на пространстве S индуцирует действие группы Spin_n на S.

Определение 1. Действие группы Spin_n на S называется её *спинорным представлением*, а элементы пространства S называются *спинорами*.

При $n = 2k$ действия группы Spin_n на каждом из пространств S^+ и S^- называются её *полуспинорными представлениями*.

Предложение 5. (1) *Спинорное представление является инъективным гомоморфизмом группы* Spin_n *в группу невырожденных линейных преобразований пространства* S.

(2) *При* $n = 2k$ *пространства* S^+ *и* S^- *не содержат нетривиальных подпространств, инвариантных по отношению к действию группы* Spin_n.

(3) *При* $n = 2k+1$ *пространство* S *не содержит нетривиальных подпространств, инвариантных по отношению к действию группы* Spin_n.

Доказательство. Пункт (1) следует из того, что $\mathrm{Spin}_n \subset \mathrm{Cl}_n^+$ и что алгебра Cl_n^+ инъективно отображается в $\mathrm{End}(S)$. Предложение 3 сводит пункты (2) и (3) к аналогичным утверждениям про алгебру Cl_n^+. Последние вытекают из того, что всякое нетривиальное подпространство фиксированного векторного подпространства можно линейным преобразованием перевести в другое нетривиальное подпространство. $\square$