Лекции курса Р. С. Авдеева и А. И. Буфетова «Спиноры»

Лекция 2

В тех случаях, когда не имеет значения, с какими числами мы работаем (действительными или комплексными), мы будем писать $\mathbb{K}$ вместо $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пусть V — векторное пространство с заданной на нём симметричной билинейной формой Q, и пусть $\mathrm{Cl}(V,Q)$ — соответствующая алгебра Клиффорда.

Пусть $(e_1,\ldots,e_n)$ — базис в V. Для каждого подмножества $I\subset\{1,\ldots,n\}$ введём элемент $e_I\in\mathrm{Cl}(V,q)$ следующим образом. Если $I=\varnothing$, то положим $e_I=1$. В противном случае $I=\{i_1,\ldots,i_s\}$, где $i_1<\ldots<i_s$, и мы полагаем $e_I=e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_s}$.

Можно показать, что элементы e_I, где I пробегает все подмножества множества $\{1,\ldots,n\}$, образуют базис в $\mathrm{Cl}(V,Q)$. В частности, $\dim\mathrm{Cl}(V,Q)=2^n$.

Пусть $\mathrm{Cl}^+(V,Q)$ (соответственно $\mathrm{Cl}^-(V,Q)$) — подпространство в $\mathrm{Cl}(V,Q)$ — порождённое всеми векторами e_I, где $|I|$ чётно (соответственно нечётно). Тогда имеется разложение

$$\mathrm{Cl}(V,Q)=\mathrm{Cl}^+(V,Q)\oplus\mathrm{Cl}^-(V,Q). \tag{1}$$

Несложно показать, что каждое из подпространств $\mathrm{Cl}^+(V,Q)$ и $\mathrm{Cl}^-(V,Q)$ не зависит от выбора базиса $(e_1,\ldots,e_n)$ пространства V.

Если для краткости положить $C^+=\mathrm{Cl}^+(V,Q)$, $C^-=\mathrm{Cl}^-(V,Q)$, то легко проверяются свойства $C^+\cdot C^+\subset C^+$, $C^+\cdot C^-\subset C^-$, $C^-\cdot C^+\subset C^-$, $C^-\cdot C^-\subset C^+$. Компонента C^+ называется *чётной*, а компонента C^- — *нечётной*.

Зафиксируем в V базис $(e_1,\ldots,e_n)$ и с этого момента будем считать, что Q — стандартное скалярное произведение в V, то есть

$$Q(x_1e_1+\ldots+x_ne_n,y_1e_1+\ldots+y_ne_n)=x_1y_1+\ldots x_ny_n.$$

Поскольку базис $(e_1,\ldots,e_n)$ ортонормирован, в алгебре $\mathrm{Cl}(V,Q)$ выполнены соотношения $e_i^2=1$ для всех i и $e_ie_j=-e_je_i$ для всех $i\neq j$. В частности, каждый элемент e_i обратим в $\mathrm{Cl}(V,Q)$ и совпадает со своим обратным.

Определение 1. Для произвольной алгебры A её *центром* называется множество

$$Z(A)=\{z\in A\mid uz=zu\ \textit{для всех}\ u\in A\}.$$

Предложение 1. *Центр алгебры* $\mathrm{Cl}(V,Q)$ *определяется следующим образом:*

$$Z(\mathrm{Cl}(V,Q))=\begin{cases}\mathbb{K}\cdot 1, & \textit{если}\ n=2k;\\ \mathbb{K}\cdot 1+\mathbb{K}\cdot e_1e_2\ldots e_n, & \textit{если}\ n=2k+1.\end{cases}$$

Доказательство. Поскольку элементы $e_1,\ldots,e_n$ порождают $\mathrm{Cl}(V,Q)$ как алгебру, элемент $x\in\mathrm{Cl}(V,Q)$ лежит в центре тогда и только тогда, когда

$$e_ix=xe_i \tag{2}$$

для всех $i=1,\ldots,n$. Так как $e_i^2=1$, то равенство (2) эквивалентно равенству $e_ixe_i=x$. Поэтому элемент $x\in\mathrm{Cl}(V,Q)$ лежит в $Z(\mathrm{Cl}(V,Q))$ тогда и только тогда, когда $e_i x e_i = x$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Далее, заметим, что если $m = e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_s}$ — базисный моном, то

$$e_i m e_i = \begin{cases} (-1)^s m, & \text{если } i \notin \{i_1, \ldots, i_s\}; \\ (-1)^{s-1} m, & \text{если } i \in \{i_1, \ldots, i_s\}. \end{cases}$$

В любом случае имеем $e_i m e_i = \pm m$. Отсюда вытекает, что произвольный элемент $x = \sum\limits_{I \subset \{1,\ldots,n\}} a_I e_I$ лежит в $Z(\mathrm{Cl}(V,Q))$ тогда и только тогда, когда $e_I \in Z(\mathrm{Cl}(V,Q))$ для всех I с условием $a_I \neq 0$. Таким образом, $Z(\mathrm{Cl}(V,Q))$ порождается как векторное пространство всеми мономами e_I, удовлетворяющими условию

$$e_i e_I e_i = e_I \text{ для всех } i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Прямая проверка показывает, что при $n = 2k$ условию (3) удовлетворяет ровно один моном $e_\varnothing = 1$, а при $n = 2k+1$ условию (3) удовлетворяют ровно два монома 1 и $e_1 e_2 \ldots e_n$. $\square$

Невырожденное линейное преобразование $\mathcal{A}$ пространства V называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярные произведения векторов, то есть

$$Q(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = Q(v,w) \text{ для любых } v, w \in V.$$

Все ортогональные преобразования пространства V образуют группу, которая называется *ортогональной группой* и обозначается символом $\mathrm{O}(V,Q)$. В матричной форме эту группу можно записать в виде

$$\mathrm{O}(V,Q) = \{A \in \mathrm{Mat}_n \mid A^\top \cdot A = E\}, \tag{4}$$

где E — единичная матрица, а символ $\top$ обозначает транспонирование. Из представления (4) вытекает, что всякая матрица $A \in \mathrm{O}(V,Q)$ обладает свойством $\det A = \pm 1$.

Специальная ортогональная группа $\mathrm{SO}(V,Q)$ состоит из ортогональных преобразований пространства V, сохраняющих ориентацию. В матричной форме это условие переписывается в виде

$$\mathrm{SO}(V,Q) = \{A \in \mathrm{O}(V,Q) \mid \det A = 1\}.$$

Всякий вектор $v \in V$ с условием $Q(v,v) \neq 0$ определяет линейное преобразование r_v пространства V, называемое *отражением* и задаваемое формулой

$$r_v(w) = w - \frac{2Q(w,v)}{Q(v,v)} v$$

для всякого вектора $w \in V$. Геометрически отражение r_v представляет собой симметрию относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору v.

Прямая проверка показывает, что всякое отражение является ортогональным преобразованием пространства V, то есть содержится в группе $\mathrm{O}(V,Q)$. Однако заметьте, что группа $\mathrm{SO}(V,Q)$ не содержит отражений!

Ниже нам потребуется следующий факт, который мы пока оставляем в качестве упражнения.

Предложение 2. *Группа* $\mathrm{O}(V,Q)$ *порождается отражениями, то есть всякий элемент из* $\mathrm{O}(V,Q)$ *представим в виде произведения конечного числа отражений.*

Из этого предложения, в частности, вытекает, что всякий элемент группы $\mathrm{SO}(V,Q)$ представим в виде произведения чётного числа отражений.

Пусть $q \in V$ и $q^2 = 1$ (то есть $Q(q,q) = 1$). Если $v \in V$, то

$$qvq = (2Q(q,v) - vq)q = 2Q(v,q)q - v = (-r_q)(v).$$

Таким образом, отображение $V \to V$, заданное формулой $v \mapsto qvq$, является линейным преобразованием пространства V, совпадающим с $-r_q$.

Теперь мы введём на алгебре $\mathrm{Cl}(V,Q)$ линейное преобразование $*$, задав его на базисных элементах следующим образом. Если $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, то полагаем $(e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_s})^* = e_{i_s} \cdot \ldots \cdot e_{i_1}$. Несложной проверкой можно убедиться, что если $x = v_1 \cdot \ldots \cdot v_s$, где $v_1, \ldots, v_s \in V$, то $x^* = v_s \cdot \ldots \cdot v_1$. Заметим, что операция $*$ обладает свойством $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$.

Введём следующие две подгруппы (относительно умножения) в алгебре $\mathrm{Cl}(V,Q)$:

$$\mathrm{Pin}(V,Q) = \{q_1 \cdot \ldots \cdot q_s \mid q_i \in V, q_i^2 = 1 \text{ для всех } i = 1, \ldots, s\},$$
$$\mathrm{Spin}(V,Q) = \mathrm{Pin}(V,Q) \cap \mathrm{Cl}^+(V,Q) = \{q_1 \cdot \ldots \cdot q_{2s} \mid q_i \in V, q_i^2 = 1 \text{ для всех } i = 1, \ldots, 2s\}.$$

Определение 2. Группа $\mathrm{Spin}(V,Q)$ называется *спинорной группой* пространства V относительно формы Q.

Заметим, что ограничение операции $*$ на группу $\mathrm{Pin}(V,Q)$ совпадает с операцией взятия обратного элемента: если $x \in \mathrm{Pin}(V,Q)$, то $x^* = x^{-1}$.

Группа $\mathrm{Pin}(V,Q)$ действует линейными преобразованиями пространства V: элементу $x = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s \in \mathrm{Pin}(V,Q)$ соответствует преобразование

$$v \mapsto xvx^* = xvx^{-1} = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s v q_s \cdot \ldots q_1 = (-r_{q_1}) \cdot \ldots \cdot (-r_{q_s})v = (-1)^s (r_{q_1} \cdot \ldots \cdot r_{q_s})v. \quad (5)$$

Из последней формулы видно, что на самом деле группа $\mathrm{Pin}(V,Q)$ действует на V ортогональными преобразованиями. Таким образом, у нас имеется гомоморфизм групп

$$\rho\colon\ \mathrm{Pin}(V,Q) \to \mathrm{O}(V,Q).$$

Ограничение этого отображения на группу $\mathrm{Spin}(V,Q)$ даёт нам гомоморфизм групп

$$\sigma\colon\ \mathrm{Spin}(V,Q) \to \mathrm{SO}(V,Q).$$

Поскольку всякий элемент группы $\mathrm{SO}(V,Q)$ является произведением чётного числа отражений, отображение σ сюръективно. Из формулы $v \mapsto xvx^{-1}$ вытекает, что ядро σ совпадает с пересечением $\mathrm{Spin}(V,Q) \cap Z(\mathrm{Cl}(V,Q))$. Но центр алгебры $\mathrm{Cl}(V,Q)$ мы уже знаем; с учётом этого легко выводится, что ядро σ состоит из двух элементов 1 и -1 (рассуждения различаются в случаях чётного и нечётного n, но ответ один и тот же!).

Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 3. *Отображение* $\sigma\colon \mathrm{Spin}(V,Q) \to \mathrm{SO}(V,Q)$ *сюръективно, а его ядро совпадает с множеством* $\{\pm 1\}$.

Теперь найдём ядро и образ отображения ρ.

Сначала предположим, что $n = 2k$. Тогда преобразование $v \mapsto -v$ пространства V является произведением чётного числа отражений (проверьте!). С учётом этого из формулы (5) вытекает, что образ гомоморфизма ρ совпадает с группой $\mathrm{O}(V, Q)$. Поскольку $Z(\mathrm{Cl}(V, Q))$ порождается единицей, ядро ρ состоит из двух элементов 1 и -1.

Теперь рассмотрим случай $n = 2k + 1$. Тогда преобразование $v \mapsto -v$ пространства V является произведением нечётного числа отражений (проверьте!). С учётом этого из формулы (5) вытекает, что для всякого элемента группы $\mathrm{Pin}(V, Q)$ его образ в группе $\mathrm{O}(V, Q)$ лежит в $\mathrm{SO}(V, Q)$. Но мы уже знаем, что образ группы $\mathrm{Spin}(V, Q)$ в точности совпадает с $\mathrm{SO}(V, Q)$. Следовательно, образ группы $\mathrm{Pin}(V, Q)$ тоже совпадает с $\mathrm{SO}(V, Q)$. Теперь найдём ядро ρ. Заметим сначала, что в ядре содержится элемент $a = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$. Пусть теперь z — произвольный элемент из ядра. Если $z \in \mathrm{Spin}(V, Q)$, то мы уже знаем, что $z = \pm 1$. Если же $z \notin \mathrm{Spin}(V, Q)$, то $za \in \mathrm{Spin}(V, Q)$ и, значит, $za = \pm 1$, откуда $z = \pm a$. Следовательно, ядро отображения ρ состоит из четырёх элементов 1, -1, a и $-a$.

Итак, мы доказали

Предложение 4. (1) *если $n = 2k$, то отображение $\rho\colon \mathrm{Pin}(V, Q) \to \mathrm{O}(V, Q)$ сюръективно, а его ядро совпадает с множеством $\{\pm 1\}$.*

(2) *если $n = 2k + 1$, то образ отображения $\rho\colon \mathrm{Pin}(V, Q) \to \mathrm{O}(V, Q)$ совпадает с $\mathrm{SO}(V, Q)$, а его ядро совпадает с множеством $\{\pm 1, \pm e_1 \cdot \ldots \cdot e_n\}$.*