Лекции курса Р. С. Авдеева и А. И. Буфетова «Спиноры»

Лекция 1

Пусть P_n — множество многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с действительными или комплексными коэффициентами. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ зададим на P_n два линейных оператора E_i («оператор рождения») и E^i («оператор уничтожения»), определив их на мономах следующим образом. Если $m = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$, то

$$E_i(m) = x_i \cdot m, \qquad E^i(m) = \begin{cases} a_i \dfrac{m}{x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(m), & \text{если } a_i > 0; \\ 0, & \text{если } a_i = 0. \end{cases}$$

Распространяя действие E_i и E^j с мономов на все многочлены, для произвольного $f \in P_n$ получаем

$$E_i(f) = x_i \cdot f, \qquad E^i(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f).$$

Прямой проверкой можно установить, что операторы $E_1, \ldots, E_n, E^1, \ldots, E^n$ удовлетворяют следующим *коммутационным соотношениям* (кружочек $\circ$ означает композицию отображений):

$$E^i \circ E_i - E_i \circ E^i = \mathrm{Id} \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{1}$$

$$E^i \circ E_j - E_j \circ E^i = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j); \tag{2}$$

$$E^i \circ E^j - E^j \circ E^i = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n); \tag{3}$$

$$E_i \circ E_j - E_j \circ E_i = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Замечания. 1. Композицию отображений следует читать справа налево. Например, $(E^i \circ E_j)(f) = E^i(E_j(f))$.

2. Символом Id обозначается тождественное отображение, которое переводит каждый многочлен в себя.

Трактуя операцию композиции операторов как умножение, рассмотрим алгебру, порождённую операторами $E_1, \ldots, E_n, E^1, \ldots, E^n$. Эта алгебра называется *алгеброй Вейля.* Можно показать, что все соотношения между образующими в этой алгебре выводятся из соотношений (1)–(4).

Обратим внимание на тот факт, что в алгебре многочленов переменные $x_1, \ldots, x_n$ попарно коммутируют, то есть для любых $i, j = 1, \ldots, n$ выполняется равенство $x_i x_j = x_j x_i$.

Теперь мы введём на переменных $x_1, \ldots, x_n$ новое умножение, обозначаемое знаком $\wedge$, и объявим, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ попарно *антикоммутируют* относительно этого умножения, а именно $x_i \wedge x_j = -x_j \wedge x_i$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$. Прямо из определения вытекает, что $x_i \wedge x_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Наша ближайшая цель — построить аналог алгебры многочленов в случае антикоммутативного умножения переменных. Как и в случае с обычными многочленами, перемножая подряд несколько переменных, мы будем получать мономы. Используя свойство антикоммутативности умножения, в каждом мономе мы можем упорядочить переменные по возрастанию, например,

$$x_3 \wedge x_2 \wedge x_1 = -x_3 \wedge x_1 \wedge x_2 = x_1 \wedge x_3 \wedge x_2 = -x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Из свойства $x_i \wedge x_i = 0$ вытекает, что если какая-либо переменная входит в моном хотя бы дважды, то этот моном нулевой. Таким образом, с точностью до знака имеется ровно 2^n мономов, и в упорядоченной форме каждый из них имеет вид $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}$ для некоторого набора чисел $(i_1, \ldots, i_k)$, удовлетворяющего неравенствам $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ (пустому набору чисел соответствует «пустой» моном 1).

Обозначим символом Λ_n векторное пространство, в котором определённые выше мономы являются базисными элементами. Теперь мы введём на Λ_n умножение.

Если $m_1 = x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}$ и $m_2 = x_{j_1} \wedge \ldots x_{j_l}$ — два монома, то их произведение определим естественным образом:

$$m_1 \wedge m_2 = x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k} \wedge x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_l}.$$

Переставляя в полученном выражении множители и пользуясь правилом антикоммутативности, мы получим либо нуль, либо новый моном в упорядоченной форме (возможно, со знаком минус).

Упражнение 1. Докажите, что определённое выше умножение на мономах обладает свойством ассоциативности: $(m_1 \wedge m_2) \wedge m_3 = m_1 \wedge (m_2 \wedge m_3)$ для любых трёх мономов m_1, m_2, m_3.

Распространим умножение на любые элементы пространства Λ_n по правилу дистрибутивности. Проверив все необходимые аксиомы, мы получаем, что пространство Λ_n с двумя операциями $(+, \wedge)$ является алгеброй. Эта алгебра называется *алгеброй Грассмана.* Она является аналогом алгебры многочленов в случае антикоммутативного умножения переменных. По построению имеем $\dim \Lambda_n = 2^n$.

Продолжая аналогию с многочленами, введём на Λ_n линейные операторы E_1, …, E_n, E^1, …, E^n следующим образом. Если $i \in \{1, \ldots, n\}$ и m — моном, то полагаем $E_i \circ m = x_i \wedge m$. Чтобы определить $E^i \circ m$, рассмотрим два случая. Если x_i не содержится в m, то полагаем $E^i \circ m = 0$. В противном случае $m = m_1 \wedge x_i \wedge m_2$, где m_1, m_2 — мономы, не содержащие x_i. Пусть s — количество переменных, входящих в m_1. Тогда полагаем $E^i(m) = (-1)^s m_1 \wedge m_2$.

Как и в случае с многочленами, прямая проверка показывает, что операторы $E_1, \ldots, E_n, E^1, \ldots, E^n$ удовлетворяют следующим *антикоммутационным соотношениям*:

$$E^i \circ E_i + E_i \circ E^i = \mathrm{Id} \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{5}$$
$$E^i \circ E_j + E_j \circ E^i = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j); \tag{6}$$
$$E^i \circ E^j + E^j \circ E^i = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n); \tag{7}$$
$$E_i \circ E_j + E_j \circ E_i = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Обозначим символом A_n алгебру, порождённую линейными операторами E_1, …, E_n, E^1, …, E^n (как и раньше, в качестве умножения в этой алгебре мы рассматриваем композицию операторов).

Предложение 1. *Алгебра A_n совпадает с алгеброй $\mathrm{End}(\Lambda_n)$ всех линейных преобразований пространства Λ_n.*

Доказательство. Для любых двух мономов $m_1, m_2 \in \Lambda_n$ обозначим символом $L(m_1, m_2)$ линейное преобразование пространства Λ_n, переводящее m_1 в m_2, а любой другой моном, отличный от m_1, в нуль. Тогда линейные преобразования $L(m_1, m_2)$, где m_1, m_2 пробегают всевозможные мономы в Λ_n, образуют базис пространства

$\mathrm{End}(\Lambda_n)$. Покажем, что всякое линейное преобразование $L(m_1, m_2)$ с точностью до знака является композицией некоторого количества операторов E_i и некоторого количества операторов E^j. Пусть

$$I_1 = \{i \mid x_i \textit{ входит в моном } m_1\} \text{ и } I_2 = \{i \mid x_i \textit{ входит в моном } m_2\}.$$

Пусть L_1 — композиция в любом порядке всех операторов вида E^i, где $i \in I_1 \backslash I_2$, а L_2 — композиция в любом порядке всех операторов вида E_i, где $i \in I_2 \backslash I_1$. Тогда оператор $L_1 \circ L_2$ с точностью до знака переводит моном m_1 в моном m_2.

Чтобы добиться того, что все мономы, отличные от m_1, переходят в нуль, введём ещё два оператора. Пусть M_1 — композиция в любом порядке всех операторов вида $E^i \circ E_i$, где $i \notin I_1$, а M_2 — композиция в любом порядке всех операторов вида $E_i \circ E^i$, где $i \in I_1$. Тогда оператор $M_1 \circ M_2$ переводит m_1 в $\pm m_1$, а все остальные мономы — в нуль.

Теперь легко видеть, что $L(m_1, m_2) = \pm L_1 \circ L_2 \circ M_1 \circ M_2$. $\square$

Поскольку $\dim \mathrm{End}(\Lambda_n) = (\dim \Lambda_n)^2 = 2^{2n}$, из предложения получаем $\dim A_n = 2^{2n}$.

Используя соотношения (5)–(8), легко вывести, что алгебра A порождается всевозможными преобразованиями вида $E^{i_1} \circ \ldots \circ E^{i_k} \circ E_{j_1} \circ \ldots \circ E_{j_l}$, где

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \quad \text{и} \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_l \leqslant n$$

(наборам $(i_1, \ldots, i_k)$ и $(j_1, \ldots, j_l)$ разрешается быть пустыми). Поскольку таких наборов ровно 2^{2n} штук и $\dim A_n = 2^{2n}$, эти наборы образуют базис алгебры A_n.

Упражнение 2. Проверьте, что в алгебре A_n всякое соотношение между образующими E_1, …, E_n, E^1, …, E^n выражается через соотношения (5)–(8).

Пусть V — $2n$-мерное векторное подпространство в A_n, натянутое на элементы $E_1, \ldots, E_n, E^1, \ldots, E^n$. Если

$$v = \alpha_1 E_1 + \ldots + \alpha_n E_n + \alpha^1 E^1 + \ldots + \alpha^n E^n \text{ и } w = \beta_1 E_1 + \ldots + \beta_n E_n + \beta^1 E^1 + \ldots + \beta^n E^n,$$

то, как показывает прямое вычисление с учётом соотношений (5)–(8),

$$v \circ w + w \circ v = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \beta^i + \alpha^i \beta_i) \cdot \mathrm{Id}\,.$$

Выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i \beta^i + \alpha^i \beta_i)$, рассматриваемое как функция от коэффициентов векторов v и w, является *симметричной билинейной формой* на пространстве V, то есть таким отображением $V \times V \to \mathbb{K}$, которое линейно по каждому аргументу и не меняется при их перестановке. Введём обозначение $Q(v, w)$ для этой билинейной формы. Таким образом, мы можем сказать следующее:

(a) алгебра A_n порождается (как алгебра) своим подпространством V;

(b) для любых двух векторов $v, w \in V$ в алгебре A_n выполнено соотношение $v \circ w + w \circ v = Q(v, w) \circ \mathrm{Id}$;

(c) всякое соотношение в алгебре A_n между элементами из V выражается через указанные в (b) соотношения.

Алгебра A_n определяется условиями (a)–(c) однозначно. Как мы увидим чуть ниже, A_n — частный случай общей конструкции алгебр Клиффорда.

Определение 1. Пусть V — действительное или комплексное векторное пространство размерности n, и пусть на V задана симметричная билинейная форма Q. *Алгеброй Клиффорда*, связанной с парой (V, Q), называется ассоциативная алгебра с единицей $\mathrm{Cl}(V, Q)$, определяемая следующими условиями:

(a) $\mathrm{Cl}(V, Q)$ содержит V как подпространство и порождается им как алгебра;

(b) для любых векторов $v, w \in V$ в алгебре $\mathrm{Cl}(V, Q)$ выполняется соотношение $v \cdot w + w \cdot v = 2Q(v, w) \cdot 1$;

(c) всякое соотношение в $\mathrm{Cl}(V, Q)$ между элементами из V выражается через указанные в (b) соотношения.

Пример 1. Если форма Q тождественно равна нулю, то $\mathrm{Cl}(V, Q) \simeq \Lambda_n$.

Пример 2. Пусть $V = \mathbb{R}^2$, e_1, e_2 — базис в V, а форма Q определена значениями $Q(e_1, e_1) = Q(e_2, e_2) = -1$, $Q(e_1, e_2) = Q(e_2, e_1) = 0$ (иными словами, значение Q на паре векторов с координатами (x_1, x_2) и (y_1, y_2) равно $-x_1y_1 - x_2y_2$. Тогда элементы $1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2$ образуют базис в $\mathrm{Cl}(V, Q)$. Полагая $i = e_1$, $j = e_2$, $k = e_1 \cdot e_2$, легко установить изоморфизм $\mathrm{Cl}(V, Q) \simeq \mathbb{H}$.

Пример 3. Пусть $V = \mathbb{R}^3$, e_1, e_2, e_3 — базис в V, а форма Q на паре векторов с координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) принимает значение $-x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$. Тогда подпространство в $\mathrm{Cl}(V, Q)$, порождённое элементами $1, i = e_1 \cdot e_2, j = e_2 \cdot e_3, k = e_3 \cdot e_1$, замкнуто относительно умножения и изоморфно алгебре $\mathbb{H}$.