MCKAY CORRESPONDENCE.

Листок 2

1. Расширения конечных групп при помощи $\mathbb{Z}_2$

Пусть Γ — конечная группа, $H \subset \Gamma$ — нормальная подгруппа, $H \simeq \mathbb{Z}^2$. Пусть $G = \Gamma/H$. Пусть также известно, что $-1 \in H$ — единственный элемент группы Γ порядка 2.

(1) Докажите, что H лежит в центре Γ (все элементы H коммутируют со всеми элементами Γ).

(2) Пусть $G \simeq \mathbb{Z}_n$ — циклическая группа порядка n. Докажите, что $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_{2n}$.

(3) Пусть $G \simeq D_n$ (группа симметрий правильного n-угольника, порожденная элементами g и s с соотношениями $g^n = id$, $s^2 = id$, $sg = g^{n-1}s$). Докажите, что $\Gamma \simeq D_{2n}$.

(4) (*) Найдите какие-нибудь образующие и соотношения Γ, если $G \simeq A_4$, $G \simeq S_4$, или $G \simeq A_5$.

(5) Докажите, что скалярное умножение на -1 — единственный элемент $SL(2, \mathbb{C})$ порядка 2.

2. Группы симметрий правильных многогранников

(1) Докажите, что группа симметрий тетраэдра изоморфна S_4 (группе, переставляющей вершины тетраэдра), а группа вращений изоморфна A_4.

(2) Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4 (группе, переставляющей большие диагонали куба).

(3) Докажите, что группа вращений додекаэдра изоморфна A_5 (группе четных перестановок пяти правильных тетраэдров, составленных из вершин этого додекаэдра).