

Группа трости
Геометрические неравенства
05.11.07 Утро, Андрей Гаврилюк

1. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ не превосходит $\frac{DA \cdot BC + AB \cdot CD}{2}$
2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$. D_1 , A_1 , B_1 , C_1 - середины сторон DA , AB , BC , CD соответственно. Докажите, что $P_{A_1B_1C_1D_1} \geq 2AC$
3. ABC - остроугольный треугольник. M , N , P - основания перпендикуляров, опущенных из его центра масс на стороны. Докажите $\frac{4}{27} \leq \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{4}$
4. **Неравенство Птолемея** В четырехугольнике $ABCD$ выполнено соотношение $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$ При чем строгое равенство выполнено тогда и только тогда, когда этот четырехугольник вписан.
5. Пусть M , A_1 , ..., A_n - отличные друг от друга точки и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Докажите

$$\frac{A_1A_2}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{A_2A_3}{MA_2 \cdot MA_3} + \dots + \frac{A_{n-1}A_n}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geq \frac{A_1A_n}{MA_1 \cdot MA_n}$$

6. Дан треугольник ABC периметра p . Окружность ω касается внутренним образом трех полуокружностей, построенных вовне треугольника на его сторонах, как на диаметрах. Докажите, что радиус ω больше, чем $p/4$.
7. A' - середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точки A . Аналогично определим точки B' и C' . Докажите $S_{A'B'C'} \geq S_{ABC}$
8. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга. Окружность ω_1 касается сторон AB , BC и CD четырехугольника $ABCD$, а окружность ω_2 касается сторон AB , CD и AD . Докажите, что $AB + CD \leq 2(BC + AD)$