Разбиения и диаграммы Юнга: от Эйлера до наших дней

Е. Ю. Смирнов

Высшая школа экономики
факультет математики

Независимый московский университет

Малый ШАД, Яндекс, 14 февраля 2015 г.

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$.

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2+3$ и $3+2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$.

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2+3$ и $3+2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$.
- Разбиения можно изображать при помощи *диаграмм Юнга*.

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$.
- Разбиения можно изображать при помощи *диаграмм Юнга*.

Пример

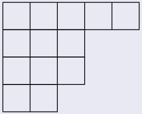
$$13 = 5 + 3 + 3 + 2$$

Разбиения

- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2+3$ и $3+2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$.
- Разбиения можно изображать при помощи *диаграмм Юнга*.

Пример

$$13 = 5 + 3 + 3 + 2$$



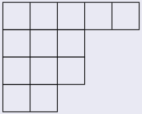
Длины строк соответствуют частям разбиения

Разбиения

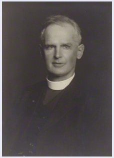
- *Разбиение* числа n — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых: $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$.
- Порядок слагаемых неважен: $2 + 3$ и $3 + 2$ — это одно и то же разбиение.
- Поэтому будем считать, что $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$.
- Разбиения можно изображать при помощи *диаграмм Юнга*.

Пример

$$13 = 5 + 3 + 3 + 2$$



Длины строк соответствуют частям разбиения



Alfred Young

(1873–1940)

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

$p(0) = 1$ $\varnothing$

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

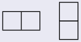
$$p(0) = 1 \qquad \varnothing$$
$$p(1) = 1 \qquad \square$$

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

$p(0) = 1$ $\varnothing$

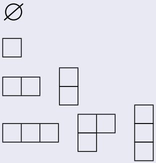
$p(1) = 1$ 

$p(2) = 2$ 

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

$$p(0) = 1$$
$$p(1) = 1$$
$$p(2) = 2$$
$$p(3) = 3$$



Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

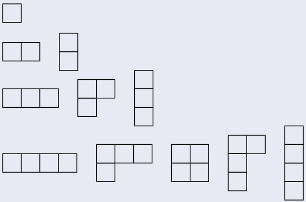
$p(0) = 1$ $\varnothing$

$p(1) = 1$

$p(2) = 2$

$p(3) = 3$

$p(4) = 5$



Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

$p(0) = 1$ $\varnothing$

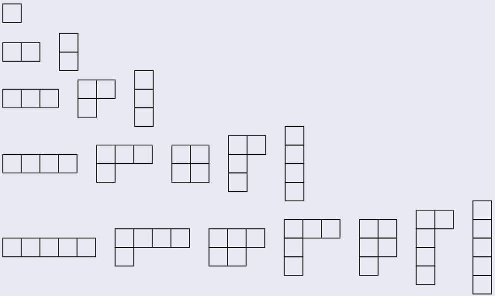
$p(1) = 1$

$p(2) = 2$

$p(3) = 3$

$p(4) = 5$

$p(5) = 7$



Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

$p(0) = 1$ $\varnothing$

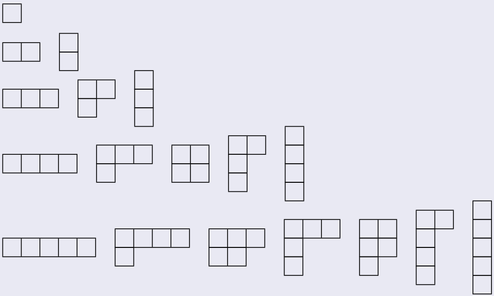
$p(1) = 1$

$p(2) = 2$

$p(3) = 3$

$p(4) = 5$

$p(5) = 7$



$p(6) = 11$ (сами нарисуйте...)

Число разбиений

Обозначим количество разбиений числа n через $p(n)$.
Нетрудно найти его значение при малых n:

$p(0) = 1$ $\varnothing$

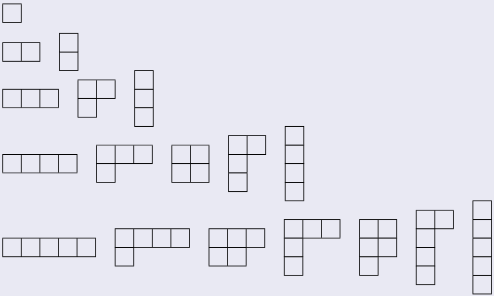
$p(1) = 1$

$p(2) = 2$

$p(3) = 3$

$p(4) = 5$

$p(5) = 7$



$p(6) = 11$ (сами нарисуйте...)

Угадать закономерность не получается!..

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность.

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность. Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots.$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots);$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность. Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots.$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \qquad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность. Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots .$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \qquad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность. Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots.$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \qquad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность. Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots .$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \qquad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Ещё пример

$a_i = C_n^i, \quad 0 \le i \le n;$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность. Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots.$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \qquad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Ещё пример

$$a_i = C_n^i, \quad 0 \le i \le n; \qquad A(q) = C_n^0 + C_n^1 q + C_n^2 q^2 + \dots + C_n^n q^n$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность. Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots.$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \qquad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Ещё пример

$$a_i = C_n^i, \quad 0 \le i \le n; \qquad A(q) = C_n^0 + C_n^1 q + C_n^2 q^2 + \dots + C_n^n q^n = (1+q)^n.$$

Производящие функции

Пусть $(a_i) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ — произвольная последовательность. Рассмотрим *формальный ряд*

$$A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots.$$

Это часто бывает очень полезно.

Пример

$$(a_n) = (1, 1, 1, \dots); \qquad A(q) = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Это геометрическая прогрессия.

Ещё пример

$$a_i = C_n^i, \quad 0 \leq i \leq n; \qquad A(q) = C_n^0 + C_n^1 q + C_n^2 q^2 + \dots + C_n^n q^n = (1+q)^n.$$

Это бином Ньютона.

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$;

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \qquad F_0 = F_1 = 1;$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \qquad F_0 = F_1 = 1; \qquad F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \ldots$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}; \qquad F_0 = F_1 = 1; \qquad F(q) = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+\dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}; \qquad F_0 = F_1 = 1; \qquad F(q) = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+\dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$

- Представьте $F(q)$ в виде

$$F(q) = \frac{1}{1-q-q^2} =$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \qquad F_0 = F_1 = 1; \qquad F(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2 F(q);$$

- Представьте $F(q)$ в виде

$$F(q) = \frac{1}{1 - q - q^2} = \frac{1}{(1 - \varphi q)(1 - \bar{\varphi} q)}$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}; \qquad F_0 = F_1 = 1; \qquad F(q) = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+\dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению
$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$
- Представьте $F(q)$ в виде
$$F(q) = \frac{1}{1-q-q^2} = \frac{1}{(1-\varphi q)(1-\bar{\varphi} q)} = \frac{a}{1-\varphi q} + \frac{b}{1-\bar{\varphi} q}.$$

Ещё один пример: числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}; \qquad F_0 = F_1 = 1; \qquad F(q) = 1+q+2q^2+3q^3+5q^4+\dots$$

Упражнение

- Докажите, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению
$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q);$$
- Представьте $F(q)$ в виде
$$F(q) = \frac{1}{1-q-q^2} = \frac{1}{(1-\varphi q)(1-\bar{\varphi}q)} = \frac{a}{1-\varphi q} + \frac{b}{1-\bar{\varphi}q}.$$
- Представьте F_n как сумму двух геометрических прогрессий.

Ответ: формула Бине

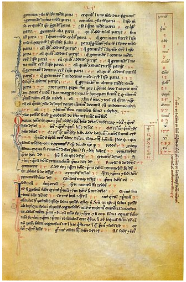
Числа Фибоначчи выражаются по *формуле Бине*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Ответ: формула Бине

Числа Фибоначчи выражаются по *формуле Бине*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$



Liber Abaci (1202)

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n) q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n.

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n.

Упростим задачу

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 1?

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n\geq 0} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n.

Упростим задачу

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 1?
- Конечно же, одно.

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n) q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n.

Упростим задачу

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 1?
- Конечно же, одно.
- А производящая функция равна

$$P_1(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Вернёмся к разбиениям

Наша ближайшая цель — выписать производящую функцию

$$P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n) q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n.

Упростим задачу

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 1?
- Конечно же, одно.
- А производящая функция равна

$$P_1(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

- (пока ничего интересного...)

Чуть-чуть усложним...

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 2?

Чуть-чуть усложним...

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 2?
- Одно или ни одного; производящая функция равна

$$P_2(q) = 1 + q^2 + q^4 + q^6 + \cdots = \frac{1}{1-q^2}.$$

Чуть-чуть усложним...

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 2?
- Одно или ни одного; производящая функция равна

$$P_2(q) = 1 + q^2 + q^4 + q^6 + \cdots = \frac{1}{1-q^2}.$$

А вот чуть более интересный вопрос

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, *не превосходящие* 2? Чему равна соответствующая производящая функция?

Чуть-чуть усложним...

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, каждое из которых равно 2?
- Одно или ни одного; производящая функция равна

$$P_2(q) = 1 + q^2 + q^4 + q^6 + \cdots = \frac{1}{1-q^2}.$$

А вот чуть более интересный вопрос

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, *не превосходящие* 2? Чему равна соответствующая производящая функция?
- Она равна *произведению* двух предыдущих производящих функций!

$$P_{\leq 2}(q) = (1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots) = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)}.$$

Производящая функция для числа разбиений

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, *не превосходящие* k?

Производящая функция для числа разбиений

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, *не превосходящие* k?
- Аналогично получаем, что

$$P_{\leq k}(q) = (1+q+q^2\dots)\dots(1+q^k+q^{2k}\dots) = \frac{1}{(1-q)\dots(1-q^k)}.$$

Производящая функция для числа разбиений

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, *не превосходящие* k?
- Аналогично получаем, что

$$P_{\leq k}(q) = (1+q+q^2\dots)\dots(1+q^k+q^{2k}\dots) = \frac{1}{(1-q)\dots(1-q^k)}.$$

Теперь можно сформулировать и общий результат:

Производящая функция для числа разбиений

- Сколько существует разбиений числа n на слагаемые, *не превосходящие* k?
- Аналогично получаем, что

$$P_{\leq k}(q) = (1+q+q^2 \dots) \dots (1+q^k+q^{2k} \dots) = \frac{1}{(1-q)\dots(1-q^k)}.$$

Теперь можно сформулировать и общий результат:

Теорема (Л. Эйлер)

Производящая функция $P(q)$ для количества разбиений $p(n)$ числа n имеет вид

$$P(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}.$$

Leonhard Euler

(1707–1783)

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots.$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$P(q)^{-1} = 1$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15}$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26}$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots.$$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \ldots.$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1;

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots.$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1;
- нулей всё больше и больше;

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \ldots.$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1;
- нулей всё больше и больше;
- чередование: два минуса, два плюса, два минуса, два плюса...

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \ldots.$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1;
- нулей всё больше и больше;
- чередование: два минуса, два плюса, два минуса, два плюса...
- разность между соседними слагаемыми одного знака: $2-1=1$, $7-5=2$, $15-12=3$, $\ldots$

Пентагональная теорема Эйлера

Посмотрим на знаменатель в выражении для $P(q)$:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots.$$

Если раскрыть первые несколько скобок, получается:

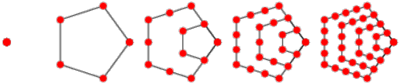
$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots.$$

Свойства этого ряда:

- все коэффициенты равны либо 0, либо ± 1;
- нулей всё больше и больше;
- чередование: два минуса, два плюса, два минуса, два плюса...
- разность между соседними слагаемыми одного знака: $2-1=1$, $7-5=2$, $15-12=3$, $\dots$
- а что такое $1, 5, 12, 22, 35\dots$?

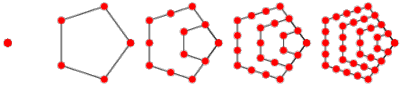
Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные числа*.



Пятиугольные числа

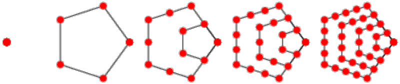
- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные числа*.



- n-е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные числа*.



- n-е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

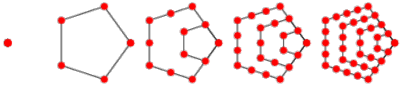
Пентагональная теорема Эйлера

Ряд, обратный к производящей функции для разбиений, равен

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}}\right).$$

Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные числа*.



- n-е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

Пентагональная теорема Эйлера

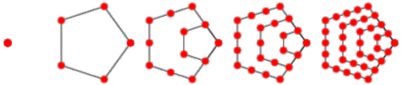
Ряд, обратный к производящей функции для разбиений, равен

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}}\right).$$

- этот ряд позволяет быстро вычислять $p(n)$;

Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные числа*.



- n-е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

Пентагональная теорема Эйлера

Ряд, обратный к производящей функции для разбиений, равен

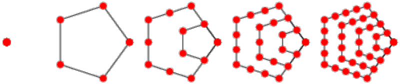
$$P(q)^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - q^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}}\right).$$

- этот ряд позволяет быстро вычислять $p(n)$;

(подробности см.: С.Л.Табачников, Д.Б.Фукс, «Математический дивертисмент»);

Пятиугольные числа

- 1, 5, 12, 22, 35 — это *пятиугольные числа*.



- n-е пятиугольное число равняется $\frac{n(3n-1)}{2}$.

Пентагональная теорема Эйлера

Ряд, обратный к производящей функции для разбиений, равен

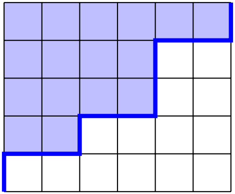
$$P(q)^{-1} = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}}\right).$$

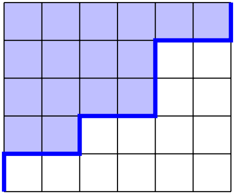
- этот ряд позволяет быстро вычислять $p(n)$;

(подробности см.: С.Л.Табачников, Д.Б.Фукс, «Математический дивертисмент»);

- обобщения: тройное тождество Якоби, η-функция Дедекинда...

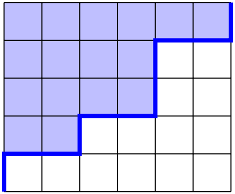
Диаграммы Юнга в прямоугольнике





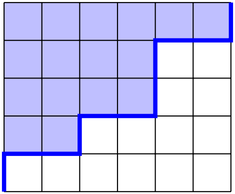
- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.

Диаграммы Юнга в прямоугольнике



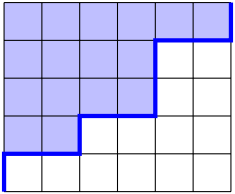
- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?

Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?
- В таких диаграммах должно быть не более m строк и n столбцов.

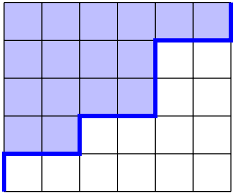
Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?
- В таких диаграммах должно быть не более m строк и n столбцов.

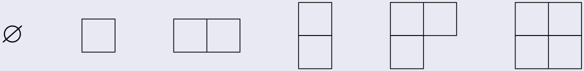
Пример: $m = n = 2$

Диаграммы Юнга в прямоугольнике

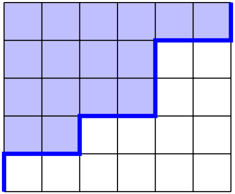


- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?
- В таких диаграммах должно быть не более m строк и n столбцов.

Пример: $m = n = 2$



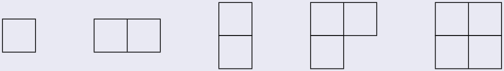
Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Рассмотрим прямоугольник размера $m \times n$.
- Сколько существует диаграмм Юнга, содержащихся в нём?
- В таких диаграммах должно быть не более m строк и n столбцов.

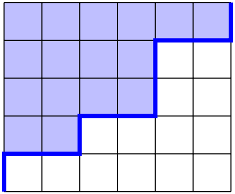
Пример: $m = n = 2$

$\varnothing$

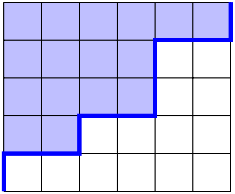


Всего 6 диаграмм.

Диаграммы Юнга в прямоугольнике

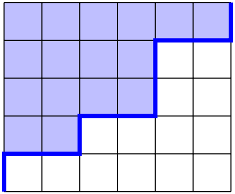


Диаграммы Юнга в прямоугольнике



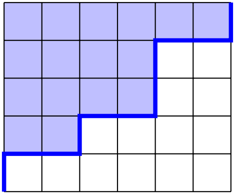
- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.

Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.
- Путь — это последовательность $m + n$ отрезков, из которых m вертикальны и n горизонтальны.

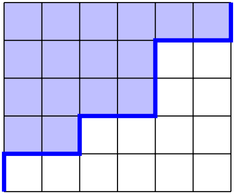
Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.
- Путь — это последовательность $m + n$ отрезков, из которых m вертикальны и n горизонтальны.
- Например, путь на рисунке соответствует последовательности

$$N \quad E \quad E \quad N \quad E \quad E \quad N \quad N \quad E \quad E \quad N$$

Диаграммы Юнга в прямоугольнике

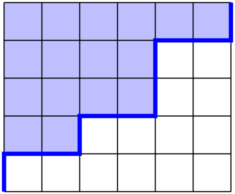


- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.
- Путь — это последовательность $m + n$ отрезков, из которых m вертикальны и n горизонтальны.
- Например, путь на рисунке соответствует последовательности

$$N \quad E \quad E \quad N \quad E \quad E \quad N \quad N \quad E \quad E \quad N$$

- Число таких последовательностей равно C_{m+n}^{m}.

Диаграммы Юнга в прямоугольнике



- Диаграммы соответствуют путям внутри прямоугольника.
- Путь — это последовательность $m+n$ отрезков, из которых m вертикальны и n горизонтальны.
- Например, путь на рисунке соответствует последовательности

$$N \quad E \quad E \quad N \quad E \quad E \quad N \quad N \quad E \quad E \quad N$$

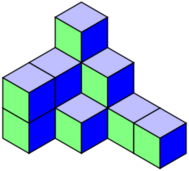
- Число таких последовательностей равно C_{m+n}^{m}.
- Нам это пригодится чуть позже...

Трёхмерные диаграммы Юнга

Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».

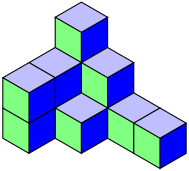
Трёхмерные диаграммы Юнга

Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».



Трёхмерные диаграммы Юнга

Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».

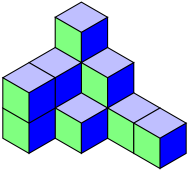


Её можно рассматривать как диаграмму Юнга, заполненную числами:

3	2	1	1
2	1		
2			

Трёхмерные диаграммы Юнга

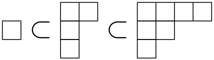
Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».



Её можно рассматривать как диаграмму Юнга, заполненную числами:

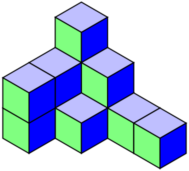
3	2	1	1
2	1		
2			

...или как последовательность вложенных диаграмм Юнга:



Трёхмерные диаграммы Юнга

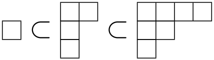
Трёхмерная диаграмма Юнга — «башня из кубиков в углу комнаты».



Её можно рассматривать как диаграмму Юнга, заполненную числами:

3	2	1	1
2	1		
2			

...или как последовательность вложенных диаграмм Юнга:



А сколько трёхмерных диаграмм Юнга можно поместить в параллелепипед размера $k \times m \times n$?

Двухэтажные диаграммы

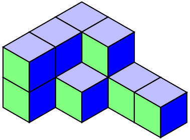
Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$.

Двухэтажные диаграммы

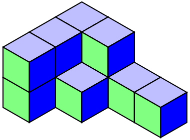
Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:

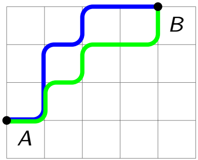
Двухэтажные диаграммы

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:



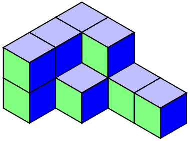
Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:

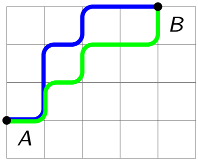


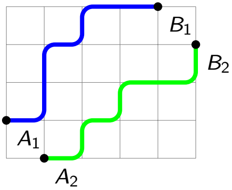


Двухэтажные диаграммы

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:

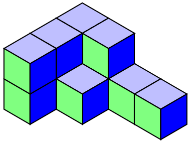


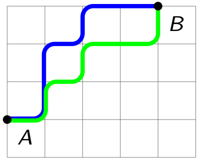


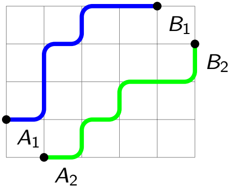


Сдвинем зелёный путь вниз и вправо.

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:







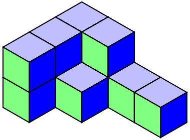
Сдвинем зелёный путь вниз и вправо. Теперь пути не пересекаются!

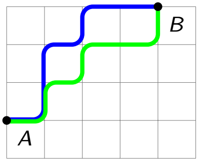
Вывод

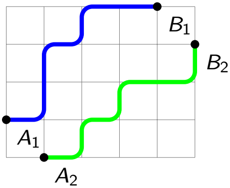
Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равно числу пар *непересекающихся* путей $(A_1 \to B_1)$ и $(A_2 \to B_2)$.

Двухэтажные диаграммы

Найдём число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$. Их можно рассматривать как пары путей:







Сдвинем зелёный путь вниз и вправо. Теперь пути не пересекаются!

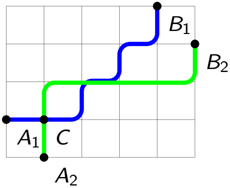
Вывод

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равно числу пар *непересекающихся* путей $(A_1 \to B_1)$ и $(A_2 \to B_2)$.

А всего таких пар (без каких-либо условий) будет $(C_{m+n}^m)^2$.

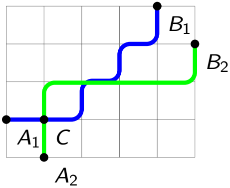
Биекция Линдстрёма–Гесселя–Вьенно

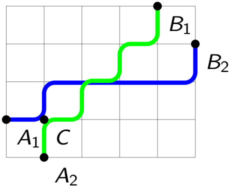
Вместо того чтобы считать число пар непересекающихся путей, найдём число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \to B_1)$ и $(A_2 \to B_2)$. Рассмотрим какую-нибудь такую пару.



Биекция Линдстрёма–Гесселя–Вьенно

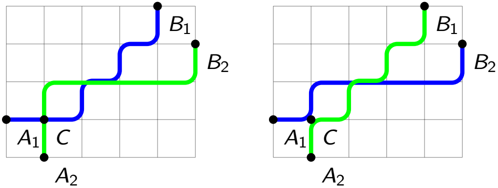
Вместо того чтобы считать число пар непересекающихся путей, найдём число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \to B_1)$ и $(A_2 \to B_2)$. Рассмотрим какую-нибудь такую пару.





Биекция Линдстрёма–Гесселя–Вьенно

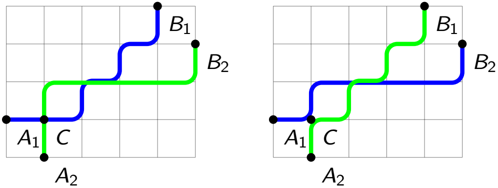
Вместо того чтобы считать число пар непересекающихся путей, найдём число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \to B_1)$ и $(A_2 \to B_2)$. Рассмотрим какую-нибудь такую пару.



По ней строится пара путей, соединяющих точки в «неправильном» порядке!

Биекция Линдстрёма–Гесселя–Вьенно

Вместо того чтобы считать число пар непересекающихся путей, найдём число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \to B_1)$ и $(A_2 \to B_2)$. Рассмотрим какую-нибудь такую пару.



По ней строится пара путей, соединяющих точки в «неправильном» порядке!

Предложение

Число пар *пересекающихся* путей $(A_1 \to B_1)$ и $(A_2 \to B_2)$ равно $C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1}$.

Формула Макмагона

Теорема

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^{m})^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1}$$

Формула Макмагона

Теорема

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^{m})^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1} = \begin{vmatrix} C_{m+n}^{m} & C_{m+n}^{m-1} \\ C_{m+n}^{m+1} & C_{m+n}^{m} \end{vmatrix}.$$

Формула Макмагона

Теорема

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^{m})^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1} = \begin{vmatrix} C_{m+n}^{m} & C_{m+n}^{m-1} \\ C_{m+n}^{m+1} & C_{m+n}^{m} \end{vmatrix}.$$

Упражнение

Докажите, что это же число равно

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(m+i)(m+i+1)}{i(i+1)}.$$

Формула Макмагона

Теорема

Число диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^{m})^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1} = \begin{vmatrix} C_{m+n}^{m} & C_{m+n}^{m-1} \\ C_{m+n}^{m+1} & C_{m+n}^{m} \end{vmatrix}.$$

Упражнение

Докажите, что это же число равно

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(m+i)(m+i+1)}{i(i+1)}.$$

Замечание

Это напоминает формулу $\mathcal{B}_{1,m,n} = C_{m+n}^{n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{m+i}{i} = \frac{(m+1)\cdot\dots\cdot(m+n)}{1\cdot\dots\cdot n}$.

Формулы Макмагона

Этот результат можно обобщить на случай произвольного k:

Формулы Макмагона

Этот результат можно обобщить на случай произвольного k:

Теорема (П. А. Макмагон)

Число трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $k \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{k,m,n} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{k} \frac{i+j+\ell-1}{i+j+\ell-2}.$$

Percy MacMahon

(1854–1929)

Формулы Макмагона

Этот результат можно обобщить на случай произвольного k:

Теорема (П. А. Макмагон)

Число трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $k \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{k,m,n} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{k} \frac{i+j+\ell-1}{i+j+\ell-2}.$$

Percy MacMahon

(1854–1929)

Теорема (П. А. Макмагон)

Производящая функция для числа трёхмерных диаграмм Юнга равна

$$P_{3D}(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$

Формулы Макмагона

Этот результат можно обобщить на случай произвольного k:

Теорема (П. А. Макмагон)

Число трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $k \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{k,m,n} = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{i+j+\ell-1}{i+j+\ell-2}.$$

Percy MacMahon

(1854–1929)

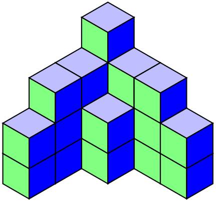
Теорема (П. А. Макмагон)

Производящая функция для числа трёхмерных диаграмм Юнга равна

$$P_{3D}(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$

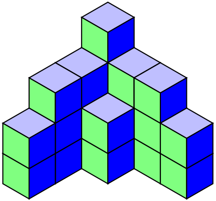
Симметрии трёхмерных диаграмм Юнга

- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:

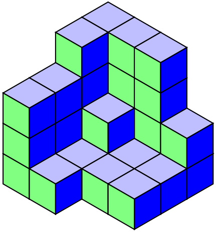


зеркальная:
относительно $x = y$

- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:



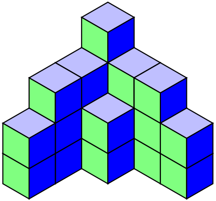
зеркальная:
относительно $x = y$



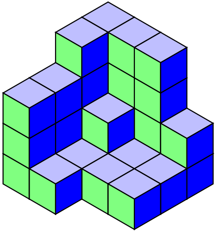
осевая:
относительно
$x = y = z$

Симметрии трёхмерных диаграмм Юнга

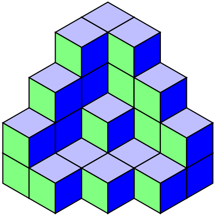
- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:



зеркальная:
относительно $x = y$

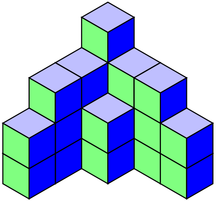


осевая:
относительно
$x = y = z$

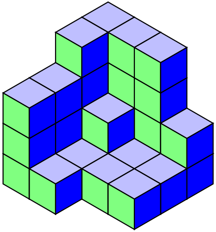


полная:
зеркальная и осевая

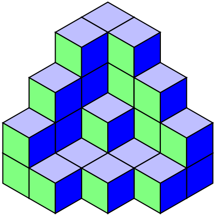
- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:



зеркальная:
относительно $x = y$



осевая:
относительно
$x = y = z$

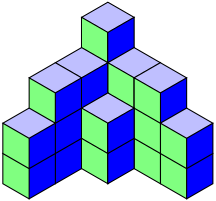


полная:
зеркальная и осевая

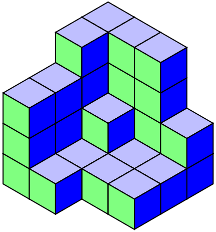
- Для них тоже можно выписывать производящие функции.

Симметрии трёхмерных диаграмм Юнга

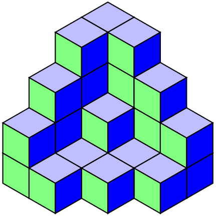
- Можно рассматривать трёхмерные диаграммы Юнга с разными симметриями:



зеркальная: относительно $x = y$



осевая: относительно $x = y = z$



полная: зеркальная и осевая

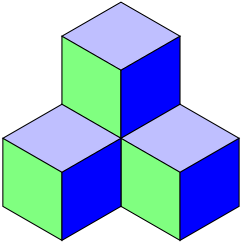
- Для них тоже можно выписывать производящие функции.
- А какие диаграммы Юнга «самые симметричные»?

Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.

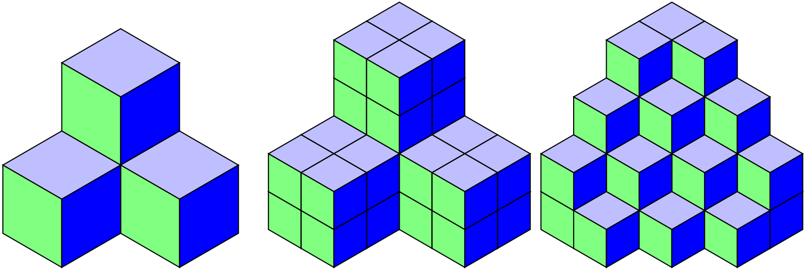
Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.



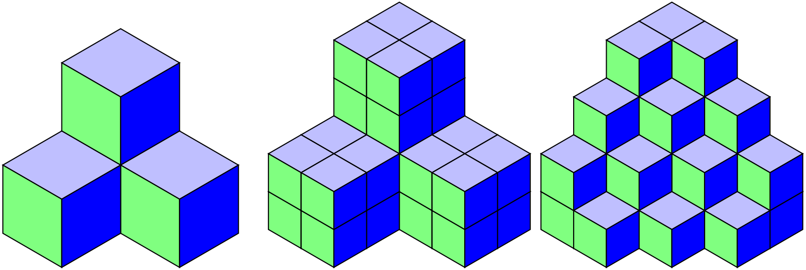
Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.



Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

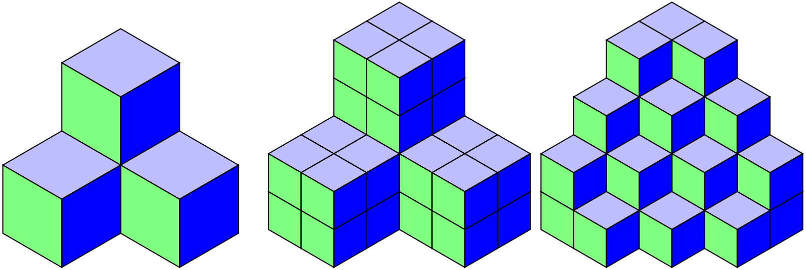
- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.



- При $n = 1$ такая диаграмма одна.

Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

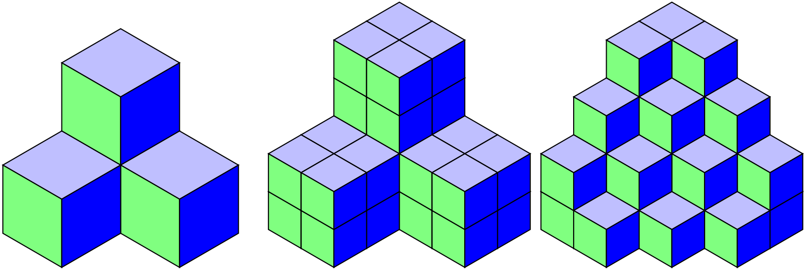
- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.



- При $n = 1$ такая диаграмма одна.
- При $n = 2$ — две.

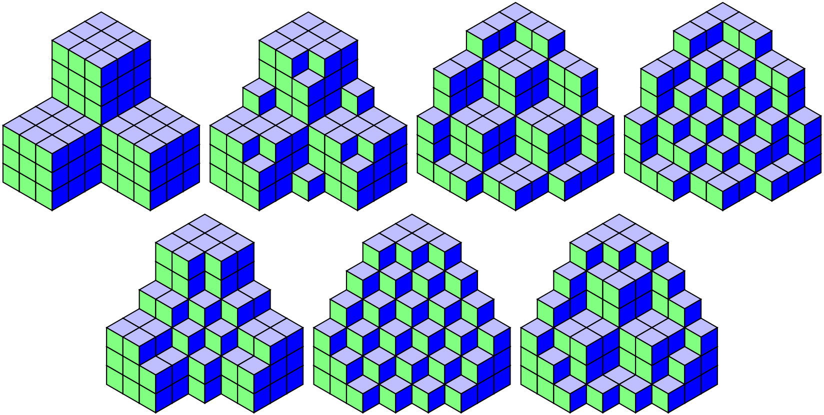
Вполне симметричные самодополнительные плоские разбиения (T.S.S.C.P.P.)

- Это диаграммы Юнга внутри куба $2n \times 2n \times 2n$, обладающие полной симметрией и совпадающие со своим дополнением.

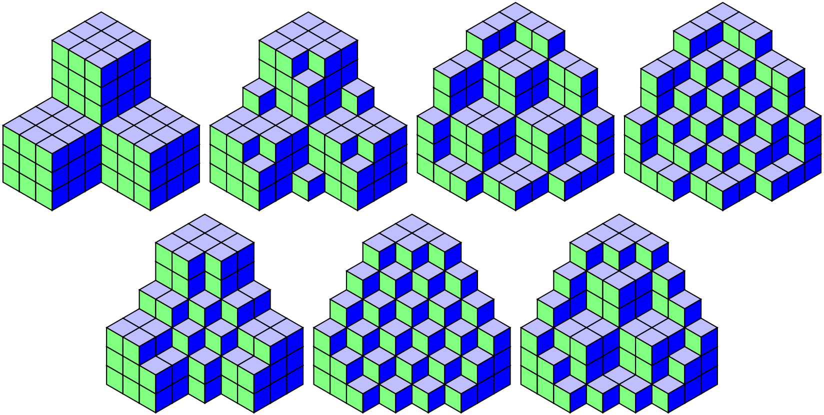


- При $n = 1$ такая диаграмма одна.
- При $n = 2$ — две.
- При $n = 3$ их уже будет семь.

TSSCPP внутри куба $6 \times 6 \times 6$



TSSCPP внутри куба $6 \times 6 \times 6$



Последовательность $TSSCPP(n)$ имеет вид: 1, 2, 7, 42, 429...

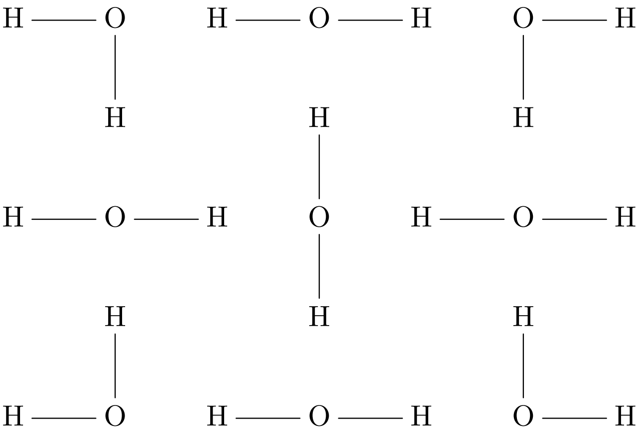
Квадратный лёд

Рассмотрим квадратную решётку, в вершинах которой стоят атомы кислорода, а на каждом ребре находится по атому водорода.

H	O	H	O	H	O	H
	H		H		H	
H	O	H	O	H	O	H
	H		H		H	
H	O	H	O	H	O	H

Квадратный лёд

Соединим каждый атом кислорода с двумя атомами водорода:

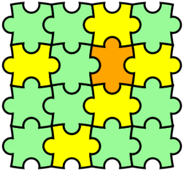


Знакочередующиеся матрицы (alternating sign matrices)

Заменим «горизонтальные» молекулы на 1, «вертикальные» на -1, а «уголки» на 0. Получим матрицу размера $n \times n$:

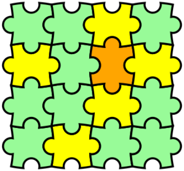
Знакочередующиеся матрицы (alternating sign matrices)

Заменим «горизонтальные» молекулы на 1, «вертикальные» на -1, а «уголки» на 0. Получим матрицу размера $n \times n$:



Знакочередующиеся матрицы (alternating sign matrices)

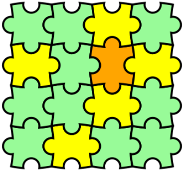
Заменим «горизонтальные» молекулы на 1, «вертикальные» на -1, а «уголки» на 0. Получим матрицу размера $n \times n$:



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знакочередующиеся матрицы (alternating sign matrices)

Заменим «горизонтальные» молекулы на 1, «вертикальные» на -1, а «уголки» на 0. Получим матрицу размера $n \times n$:



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства знакочередующихся матриц

- в каждых строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждых строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: $\quad$ 1;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 6 \cdot 7$;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 6 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: $\quad 1$;
- $n = 2$: $\quad 2$;
- $n = 3$: $\quad 7$;
- $n = 4$: $\quad 42 = 6 \cdot 7$;
- $n = 5$: $\quad 429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $\quad 7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 6 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \ldots$

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: $\quad 1$;
- $n = 2$: $\quad 2$;
- $n = 3$: $\quad 7$;
- $n = 4$: $\quad 42 = 6 \cdot 7$;
- $n = 5$: $\quad 429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $\quad 7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $\quad 218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \ldots$

Возникают в связи с методом подсчёта определителей — *конденсацией Доджсона* (Миллс, Роббинс, Рамси, 1980-е гг.)

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 6 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19\ldots$

Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898)

Возникают в связи с методом подсчёта определителей — *конденсацией Доджсона* (Миллс, Роббинс, Рамси, 1980-е гг.)

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 6 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \ldots$

Возникают в связи с методом подсчёта определителей — *конденсацией Доджсона* (Миллс, Роббинс, Рамси, 1980-е гг.)

Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898)

a.k.a. Lewis Carroll

Сколько таких матриц?

- $n = 1$: 1;
- $n = 2$: 2;
- $n = 3$: 7;
- $n = 4$: $42 = 6 \cdot 7$;
- $n = 5$: $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$;
- $n = 6$: $7436 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13^2$;
- $n = 7$: $218348 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \ldots$

Возникают в связи с методом подсчёта определителей — *конденсацией Доджсона* (Миллс, Роббинс, Рамси, 1980-е гг.)

Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898)

a.k.a. Lewis Carroll

Это те же самые числа, которые возникали при подсчёте вполне симметричных самодополнительных плоских разбиений!

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждых строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждых строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждых строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждых строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n.

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждых строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждых строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n.
- Заметим, что в первой строке всегда стоит ровно одна единица.

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждых строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждых строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n.
- Заметим, что в первой строке всегда стоит ровно одна единица.
- Пусть число матриц, где она стоит на k-м месте, равно $A_{n,k}$.

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждых строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждых строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n.
- Заметим, что в первой строке всегда стоит ровно одна единица.
- Пусть число матриц, где она стоит на k-м месте, равно $A_{n,k}$.
- Тогда $A_n = A_{n,1} + A_{n,2} + \cdots + A_{n,n}$.

Знакочередующиеся матрицы

Напомним свойства знакочередующихся матриц:

- в каждых строке и столбце 1 и -1 чередуются, возможно, перемежаясь нулями;
- сумма элементов в каждых строке и столбце равна 1 (единиц на одну больше, чем минус единиц).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Обозначим через A_n число знакочередующихся матриц порядка n.
- Заметим, что в первой строке всегда стоит ровно одна единица.
- Пусть число матриц, где она стоит на k-м месте, равно $A_{n,k}$.
- Тогда $A_n = A_{n,1} + A_{n,2} + \dots + A_{n,n}$.
- Кроме того, $A_{n+1,1} = A_n$.

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$1$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 2 & & 3 & & 2 \end{array}$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 2 & & 3 & & 2 & \\
7 & & 14 & & 14 & & 7
\end{array}
$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 2 & & 3 & & 2 & & \\
 & 7 & & 14 & & 14 & & 7 & \\
42 & & 105 & & 135 & & 105 & & 42
\end{array}
$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 3 & & 2 & & & \\
 & & 7 & & 14 & & 14 & & 7 & & \\
 & 42 & & 105 & & 135 & & 105 & & 42 & \\
429 & & 1287 & & 2002 & & 2002 & & 1287 & & 429
\end{array}
$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Рассмотрим «треугольник Паскаля», состоящий из чисел $A_{n,k}$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 3 & & 2 & & & \\
 & & 7 & & 14 & & 14 & & 7 & & \\
 & 42 & & 105 & & 135 & & 105 & & 42 & \\
429 & & 1287 & & 2002 & & 2002 & & 1287 & & 429
\end{array}
$$

Никакой закономерности пока что не видно...

Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

$$1$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ 1 & & 2/2 & & 1 \end{array}$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & 1 & & \color{red}{2/2} & & 1 & & \\ 2 & & \color{red}{2/3} & & 3 & & \color{red}{3/2} & & 2 \end{array}$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 2/2 & 1 & & \\
 & 2 & 2/3 & 3 & 3/2 & 2 & \\
7 & 2/4 & 14 & 5/5 & 14 & 4/2 & 7
\end{array}
$$

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & \color{red}{2/2} & 1 & & & \\
 & & 2 & \color{red}{2/3} & 3 & \color{red}{3/2} & 2 & & \\
 & 7 & \color{red}{2/4} & 14 & \color{red}{5/5} & 14 & \color{red}{4/2} & 7 & \\
42 & \color{red}{2/5} & 105 & \color{red}{7/9} & 135 & \color{red}{9/7} & 105 & \color{red}{5/2} & 42
\end{array}
$$

Треугольник Паскаля на новый лад

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

					1					
				1	2/2	1				
			2	2/3	3	3/2	2			
		7	2/4	14	5/5	14	4/2	7		
	42	2/5	105	7/9	135	9/7	105	5/2	42	
429	2/6	1287	9/14	2002	16/16	2002	14/9	1287	6/2	429

Запишем между каждыми двумя числами их отношение в виде некоторой (сократимой) дроби:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2/2 & 1 & & & & \\
 & & & 2 & 2/3 & 3 & 3/2 & 2 & & & \\
 & & 7 & 2/4 & 14 & 5/5 & 14 & 4/2 & 7 & & \\
 & 42 & 2/5 & 105 & 7/9 & 135 & 9/7 & 105 & 5/2 & 42 & \\
429 & 2/6 & 1287 & 9/14 & 2002 & 16/16 & 2002 & 14/9 & 1287 & 6/2 & 429
\end{array}
$$

Треугольник Паскаля на новый лад

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 2/2 & & & & & \\
 & & & & 2/3 & & 3/2 & & & & \\
 & & & 2/4 & & 5/5 & & 4/2 & & & \\
 & & 2/5 & & 7/9 & & 9/7 & & 5/2 & & \\
 & 2/6 & & 9/14 & & 16/16 & & 14/9 & & 6/2 &
\end{array}
$$

Треугольник Паскаля на новый лад

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 2/2 & & & & \\
 & & & 2/3 & & 3/2 & & & \\
 & & 2/4 & & 5/5 & & 4/2 & & \\
 & 2/5 & & 7/9 & & 9/7 & & 5/2 & \\
2/6 & & 9/14 & & 16/16 & & 14/9 & & 6/2
\end{array}$$

Теперь закономерность налицо!

Треугольник Паскаля на новый лад

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 2/2 & & & & \\
 & & & 2/3 & & 3/2 & & & \\
 & & 2/4 & & 5/5 & & 4/2 & & \\
 & 2/5 & & 7/9 & & 9/7 & & 5/2 & \\
2/6 & & 9/14 & & 16/16 & & 14/9 & & 6/2
\end{array}
$$

Теперь закономерность налицо!

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1+1 & & & & \\
 & & & 1+1 & & 1+2 & & & \\
 & & 1+1 & & 2+3 & & 1+3 & & \\
 & 1+1 & & 3+4 & & 3+6 & & 1+4 & \\
1+1 & & 4+5 & & 6+10 & & 4+10 & & 1+5
\end{array}
$$

ASM-гипотеза (Миллс, Роббинс, Рамси)

Гипотеза

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-1}^{n-k-1}}.$$

ASM-гипотеза (Миллс, Роббинс, Рамси)

Гипотеза

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-1}^{n-k-1}}.$$

Следствие (ASM-гипотеза)

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \cdots \cdot (3n-1)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot \cdots \cdot (2n-1)!}.$$

ASM-гипотеза (Миллс, Роббинс, Рамси)

Гипотеза

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-1}^{n-k-1}}.$$

Следствие (ASM-гипотеза)

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \dots \cdot (3n-1)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot \dots \cdot (2n-1)!}.$$

Упражнение

Выведите вторую гипотезу из первой.

Доказательства ASM-гипотезы

- в 1994 году Джордж Эндрюс доказал, что $TSSCPP(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$;

Доказательства ASM-гипотезы

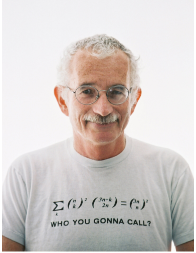
- в 1994 году Джордж Эндрюс доказал, что $TSSCPP(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$;
- в 1995 году Дорон Зейльбергер опубликовал очень длинное и сложное доказательство ASM-гипотезы;

Доказательства ASM-гипотезы

- в 1994 году Джордж Эндрюс доказал, что $TSSCPP(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$;
- в 1995 году Дорон Зейльбергер опубликовал очень длинное и сложное доказательство ASM-гипотезы;
- более короткое доказательство было опубликовано Грегом Купербергом в 1996-м году.

Доказательства ASM-гипотезы

- в 1994 году Джордж Эндрюс доказал, что $TSSCPP(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$;
- в 1995 году Дорон Зейльбергер опубликовал очень длинное и сложное доказательство ASM-гипотезы;
- более короткое доказательство было опубликовано Грегом Купербергом в 1996-м году.



Doron Zeilberger

(b. 1950)

Greg Kuperberg

(b. 1967)

Спасибо за внимание!

Вот и всё на сегодня

Спасибо за внимание!

(но история на этом не заканчивается...)

Что почитать?

- David Bressoud. Proofs and Confirmations: the story of the alternating sign matrix conjecture. MAA, 1999.
- С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс. Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011. *(лекция 3 — о диаграммах Юнга).*
- М. А. Берштейн, Г. А. Мерзон. Диаграммы Юнга, пути на решётке и метод отражений. Математическое просвещение, третья серия, вып. 18. М.: МЦНМО, 2014.
- Е. Ю. Смирнов. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы. М.: МЦНМО, 2014.
- Е. Ю. Смирнов. Три взгляда на ацтекский бриллиант. М.: МЦНМО, 2015 (в печати).
- Материалы летней школы «Современная математика», Дубна. http://www.mathnet.ru