Симметрия в математике и не только

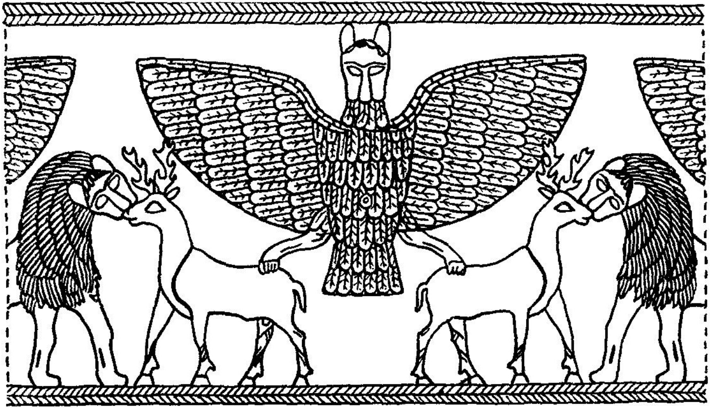
Е. Ю. Смирнов

Высшая школа экономики
факультет математики

Независимый московский университет

8 октября 2013 г.

Симметрия и красота



Ваза шумерского царя Энтемены, 2700 г. до н.э.

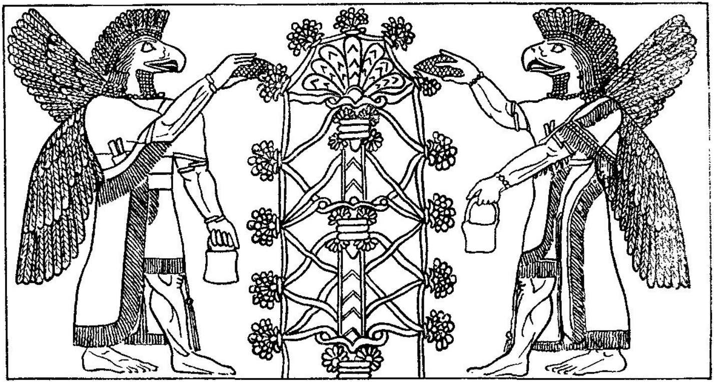
Зеркальная (геральдическая) симметрия

Герб императора Иоанна VIII Палеолога (1425–1448)

От сферической к зеркальной симметрии

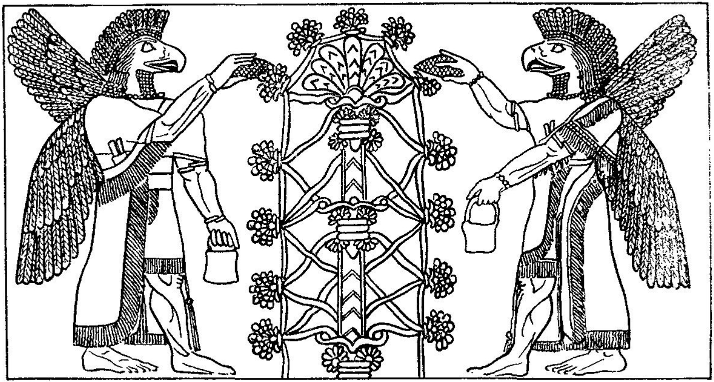
Платон, диалог «Пир»: миф об андрогинах

Правое и левое



Эти фигуры на первый взгляд кажутся зеркально-симметричными.

Правое и левое

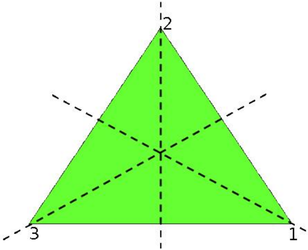


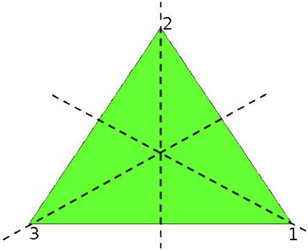
Эти фигуры на первый взгляд кажутся зеркально-симметричными. Однако они совмещаются не отражением, а поворотом на 180°.

Правое и левое

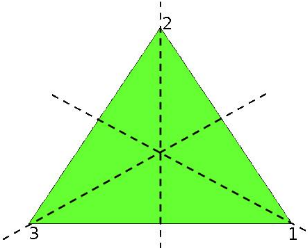
Почему винтовая лестница и штопор закручены в разные стороны?

Симметрии равностороннего треугольника





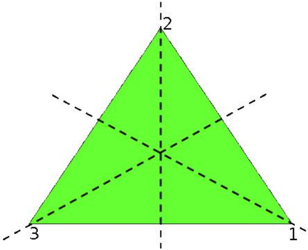
Какие преобразования переводят треугольник в себя?



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;

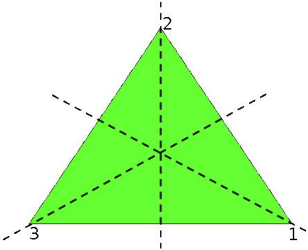
Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);

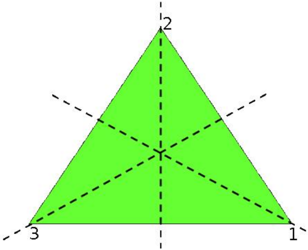
Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Симметрии равностороннего треугольника

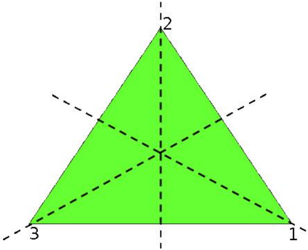


Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

Симметрии равностороннего треугольника



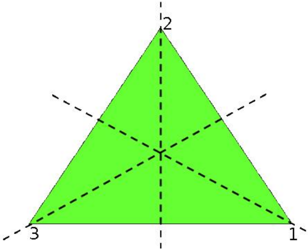
Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

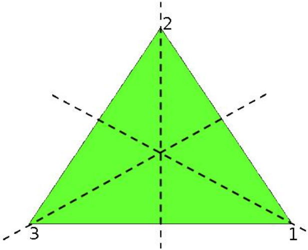
- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

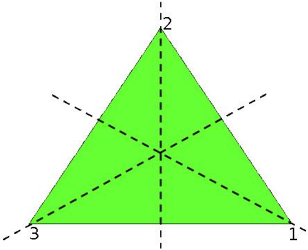
Итого 6 преобразований.

Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

У преобразований можно рассматривать:

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

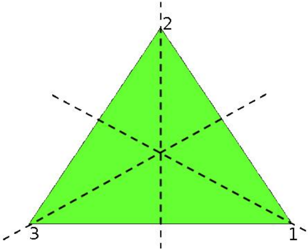
Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

У преобразований можно рассматривать:

- композицию;

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

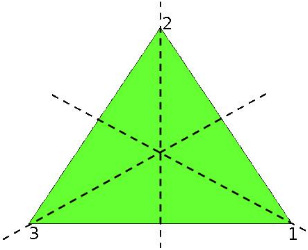
Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

У преобразований можно рассматривать:

- композицию;
- обратное преобразование;

Симметрии равностороннего треугольника



Какие преобразования переводят треугольник в себя?

- три отражения;
- два поворота (на 120° и 240°);
- *тождественное* преобразование.

Итого 6 преобразований.

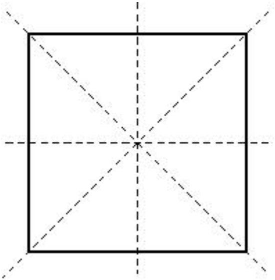
Они соответствуют перестановкам множества $\{1, 2, 3\}$: любая перестановка вершин отвечает симметрии треугольника.

Группа преобразований

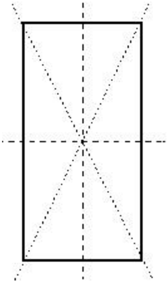
У преобразований можно рассматривать:

- композицию;
- обратное преобразование;
- тождественное преобразование.

Квадрат и прямоугольник

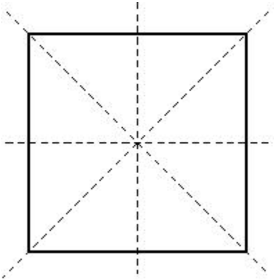


8 симметрий

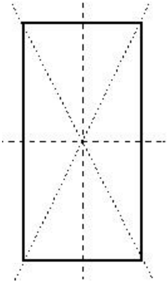


4 симметрии

Квадрат и прямоугольник



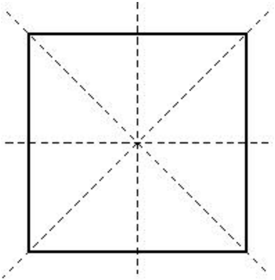
8 симметрий



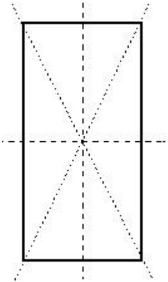
4 симметрии

Квадрат «более симметричен», чем произвольный прямоугольник!

Квадрат и прямоугольник



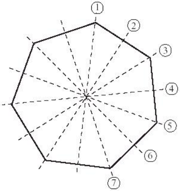
8 симметрий



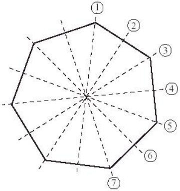
4 симметрии

Квадрат «более симметричен», чем произвольный прямоугольник!

А какие многоугольники/многогранники «самые симметричные»?



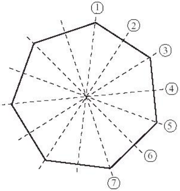
У правильного n-угольника:



У правильного n-угольника:

- все углы и все стороны равны;

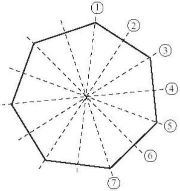
Правильные многоугольники



У правильного *n*-угольника:

- все углы и все стороны равны;
- *n* зеркальных симметрий;

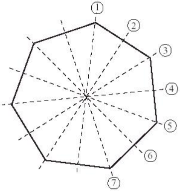
Правильные многоугольники



У правильного n-угольника:

- все углы и все стороны равны;
- n зеркальных симметрий;
- n поворотов (включая тождественное преобразование);

Правильные многоугольники



У правильного n-угольника:

- все углы и все стороны равны;
- n зеркальных симметрий;
- n поворотов (включая тождественное преобразование);
- итого $2n$ симметрий.

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)

Правильные многогранники

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)

Тетраэдр — пример *правильного многогранника*:

Правильные многогранники

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)

Тетраэдр — пример *правильного многогранника*:

- Все грани — правильные многоугольники;

Правильные многогранники

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)

Тетраэдр — пример *правильного многогранника*:

- Все грани — правильные многоугольники;
- Все двугранные углы между гранями равны.

Правильные многогранники

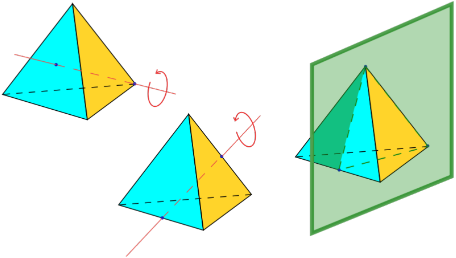
Тетраэдр (правильная треугольная пирамида)

Тетраэдр — пример *правильного многогранника*:

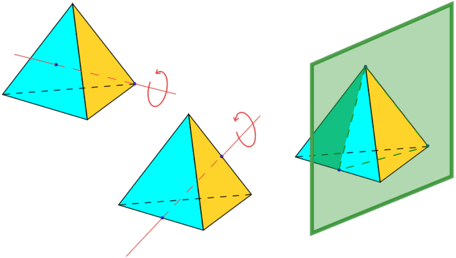
- Все грани — правильные многоугольники;
- Все двугранные углы между гранями равны.

У таких многогранников самая большая группа симметрий.

Симметрии тетраэдра

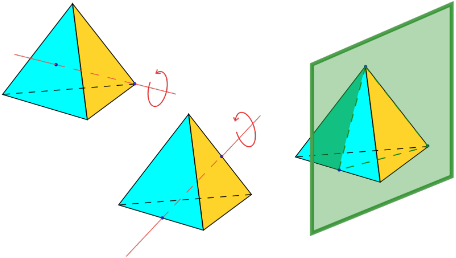


Симметрии тетраэдра

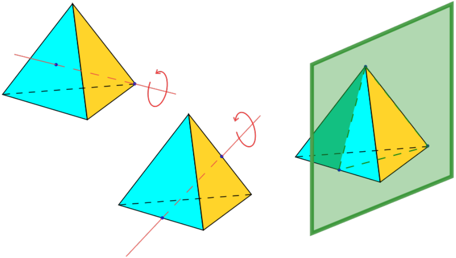


- тождественное преобразование;

Симметрии тетраэдра

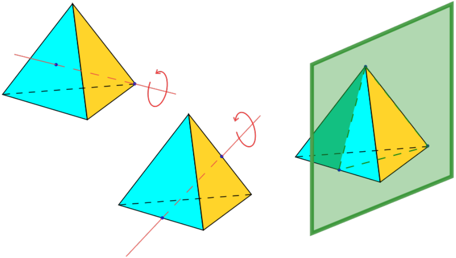


- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;



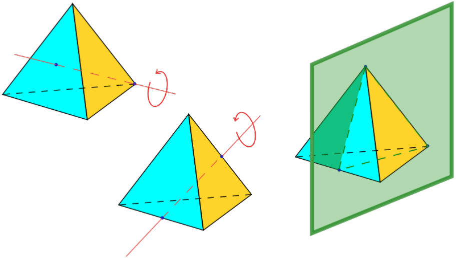
- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;
- 3 поворота относительно середин сторон ребер;

Симметрии тетраэдра



- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;
- 3 поворота относительно середин сторон ребер;
- 12 отражений.

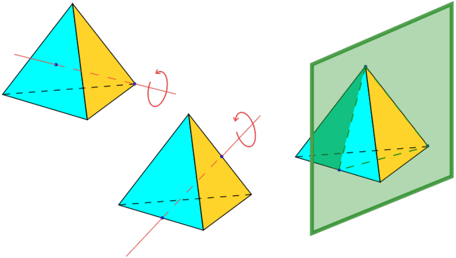
Симметрии тетраэдра



- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;
- 3 поворота относительно середин сторон ребер;
- 12 отражений.

Итого 24 преобразования.

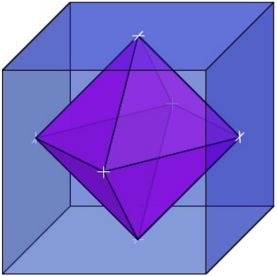
Симметрии тетраэдра



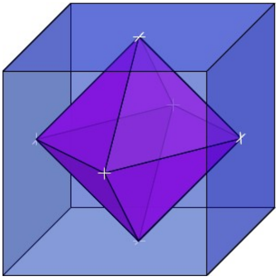
- тождественное преобразование;
- 8 поворотов относительно вершины;
- 3 поворота относительно середин сторон ребер;
- 12 отражений.

Итого 24 преобразования.
Они реализуют всевозможные перестановки множества вершин.

Куб и октаэдр

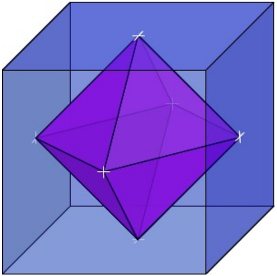


Куб и октаэдр



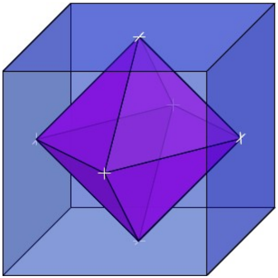
- Это *двойственные многогранники*.

Куб и октаэдр



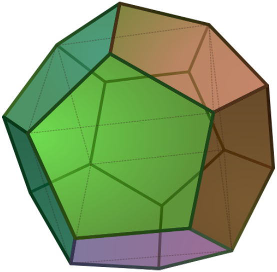
- Это *двойственные многогранники*.
- У них одинаковая группа симметрий.

Куб и октаэдр

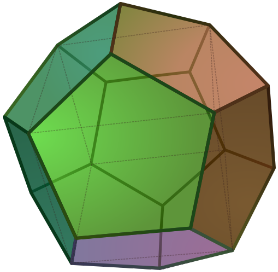


- Это *двойственные многогранники*.
- У них одинаковая группа симметрий.
- Она состоит из 48 элементов.

Додекаэдр

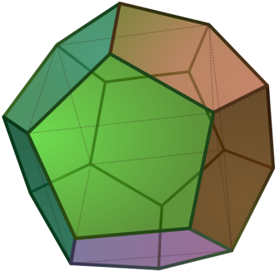


Додекаэдр



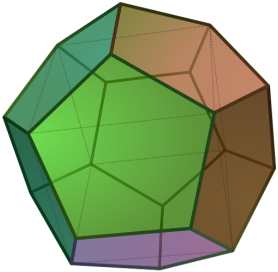
- Правильный многогранник с 12 гранями;

Додекаэдр



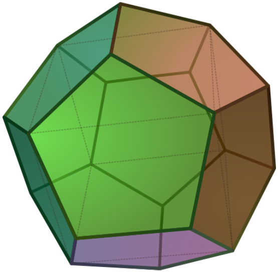
- Правильный многогранник с 12 гранями;
- Каждая грань — правильный пятиугольник.

Додекаэдр



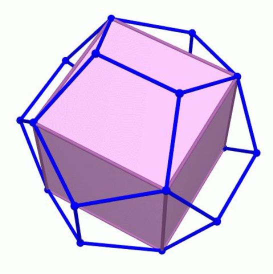
- Правильный многогранник с 12 гранями;
- Каждая грань — правильный пятиугольник.
- 12 граней, 30 ребер, 20 вершин.

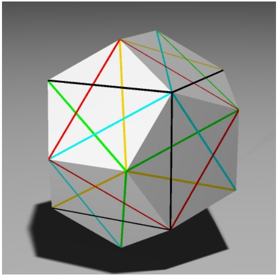
Додекаэдр



- Правильный многогранник с 12 гранями;
- Каждая грань — правильный пятиугольник.
- 12 граней, 30 ребер, 20 вершин.
- Группа симметрий состоит из 120 элементов.

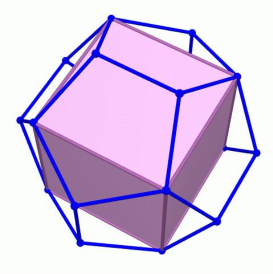
Кубы Кеплера

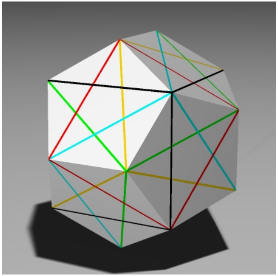




Как изучать симметрии додекаэдра?

Кубы Кеплера

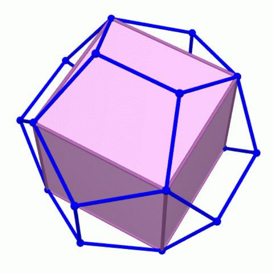


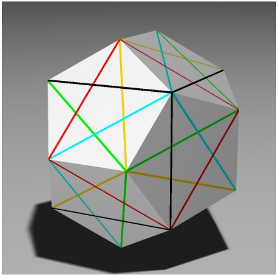


Как изучать симметрии додекаэдра?

- В додекаэдр можно вписать пять кубов.

Кубы Кеплера

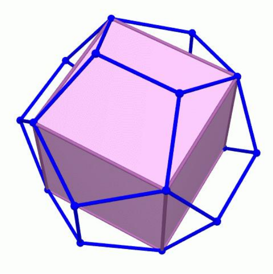


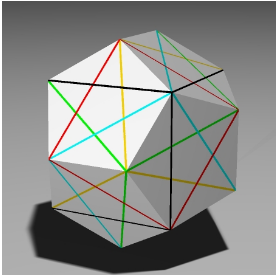


Как изучать симметрии додекаэдра?

- В додекаэдр можно вписать пять кубов.
- Эти кубы переставляются симметриями додекаэдра.

Кубы Кеплера

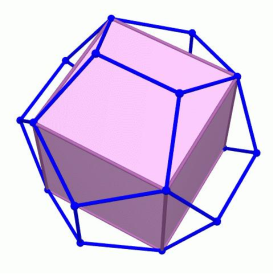


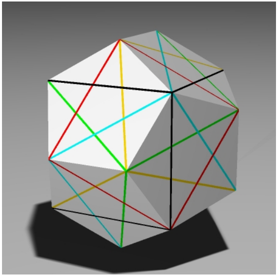


Как изучать симметрии додекаэдра?

- В додекаэдр можно вписать пять кубов.
- Эти кубы переставляются симметриями додекаэдра.
- Центральная симметрия не переставляет кубы.

Кубы Кеплера

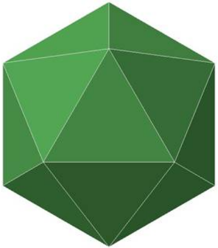




Как изучать симметрии додекаэдра?

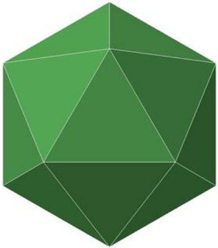
- В додекаэдр можно вписать пять кубов.
- Эти кубы переставляются симметриями додекаэдра.
- Центральная симметрия не переставляет кубы.
- Можно реализовать не все перестановки кубов, а только половину (60 из 120).

Икосаэдр



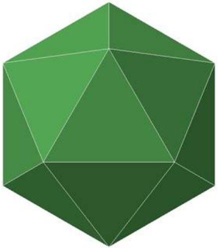
- 20 граней, 30 ребер, 12 вершин.

Икосаэдр



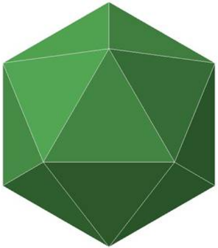
- 20 граней, 30 ребер, 12 вершин.
- Икосаэдр двойственен к додекаэдру.

Икосаэдр



- 20 граней, 30 ребер, 12 вершин.
- Икосаэдр двойственен к додекаэдру.
- Группа симметрий — такая же, как у додекаэдра.

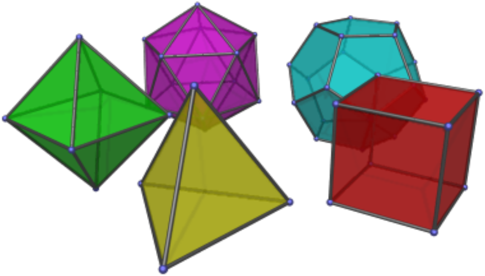
Икосаэдр



- 20 граней, 30 ребер, 12 вершин.
- Икосаэдр двойственен к додекаэдру.
- Группа симметрий — такая же, как у додекаэдра.

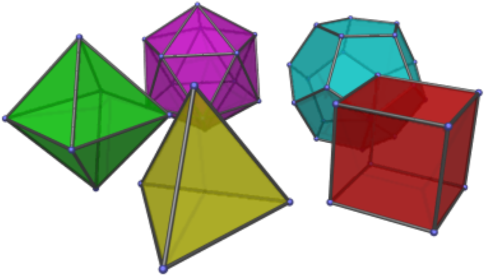
На фото справа — икосаэдр в составе паркового украшения в саду Холирудского дворца, Эдинбург, Шотландия.

Платоновы тела



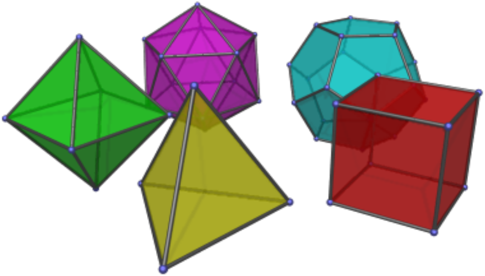
- Согласно Платону, лежат в основе мироздания.

Платоновы тела

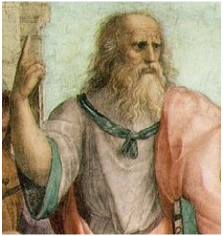


- Согласно Платону, лежат в основе мироздания.
- Олицетворяют четыре стихии: огонь — тетраэдр, земля — куб, воздух — октаэдр, вода — икосаэдр.

Платоновы тела



- Согласно Платону, лежат в основе мироздания.
- Олицетворяют четыре стихии: огонь — тетраэдр, земля — куб, воздух — октаэдр, вода — икосаэдр.
- Додекаэдр олицетворяет Вселенную.



Платон
(427–347 до н.э.)

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а $\sqrt{q}$ иррационально.

Симметрия в алгебре

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а $\sqrt{q}$ иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а $\sqrt{q}$ иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Пример

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Симметрия в алгебре

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а $\sqrt{q}$ иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Пример

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Корни: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2 - \sqrt{3}$.

Симметрия в алгебре

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а $\sqrt{q}$ иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Пример

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Корни: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2 - \sqrt{3}$.
Симметрия: $\sqrt{3} \leftrightarrow -\sqrt{3}$.

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Пусть a, b, c — целые числа, и уравнение имеет корень вида $x = p + \sqrt{q}$, где p, q — рациональные, а $\sqrt{q}$ иррационально. Тогда $x = p - \sqrt{q}$ — тоже корень!

Пример

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Корни: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2 - \sqrt{3}$.
Симметрия: $\sqrt{3} \leftrightarrow -\sqrt{3}$.

То же верно и для любого уравнения с целыми коэффициентами вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Группа Галуа

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Группа Галуа

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Группа Галуа

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Тогда $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ — тоже корни! Всего их четыре.

Группа Галуа

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Тогда $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ — тоже корни! Всего их четыре.

Симметрии уравнения

$$\begin{tikzcd} -\sqrt{2}+\sqrt{3} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \sqrt{2}+\sqrt{3} \arrow[d, dash] \\ -\sqrt{2}-\sqrt{3} \arrow[r, dash] & \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{tikzcd}$$

Группа Галуа

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Тогда $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ — тоже корни! Всего их четыре.

Симметрии уравнения

$$\begin{tikzcd}
-\sqrt{2} + \sqrt{3} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \sqrt{2} + \sqrt{3} \arrow[d, dash] \\
-\sqrt{2} - \sqrt{3} \arrow[r, dash] & \sqrt{2} + \sqrt{3}
\end{tikzcd}$$

Симметрии этого уравнения — такие же, как у прямоугольника.

Группа Галуа

Пример

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Тогда $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ — тоже корни! Всего их четыре.

Симметрии уравнения

$$\begin{tikzcd}
-\sqrt{2}+\sqrt{3} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \sqrt{2}+\sqrt{3} \arrow[d, dash] \\
-\sqrt{2}-\sqrt{3} \arrow[r, dash] & \sqrt{2}+\sqrt{3}
\end{tikzcd}$$

Симметрии этого уравнения — такие же, как у прямоугольника.
Группу симметрий корней уравнения называют его *группой Галуа*.

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

А дальше?..

- *Формула Феррари*: решение уравнения 4-й степени.

Теория Галуа

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

А дальше?..

- *Формула Феррари*: решение уравнения 4-й степени.
- Степень 5 и выше: явной формулы нет!

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

А дальше?..

- *Формула Феррари*: решение уравнения 4-й степени.
- Степень 5 и выше: явной формулы нет!
- Причина: группа Галуа такого уравнения может быть устроена слишком сложно.

Теория Галуа

Кубические уравнения: формула Кардано

$$x^3 + px + q = 0;$$

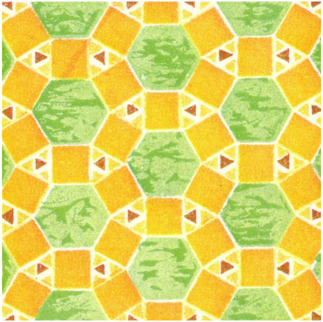
$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q}{2}}}.$$

А дальше?..

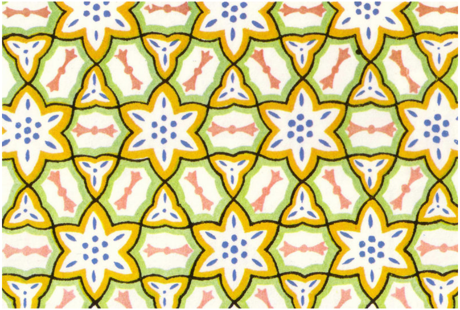
- *Формула Феррари*: решение уравнения 4-й степени.
- Степень 5 и выше: явной формулы нет!
- Причина: группа Галуа такого уравнения может быть устроена слишком сложно.
- Например, как группа вращений додекаэдра.

Эварист Галуа (1811–1832)

Снова геометрия: группы симметрий орнаментов

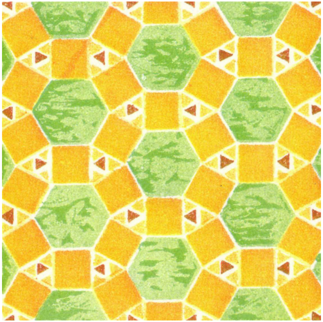


Римский орнамент

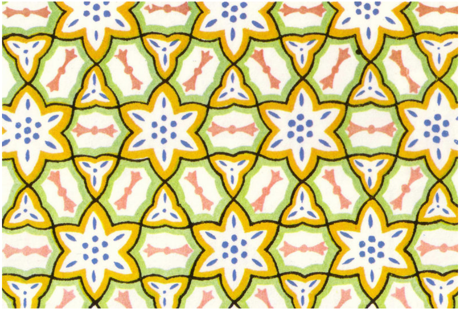


Персидский орнамент

Снова геометрия: группы симметрий орнаментов



Римский орнамент

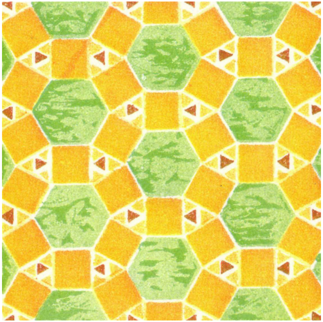


Персидский орнамент

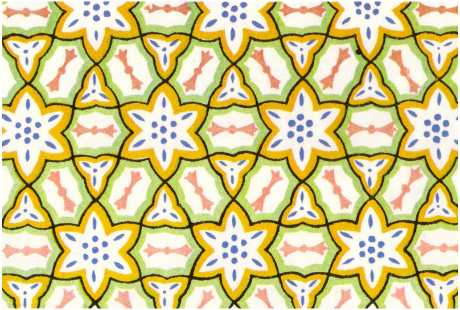
Задача

Классифицировать периодические орнаменты на плоскости.

Снова геометрия: группы симметрий орнаментов



Римский орнамент

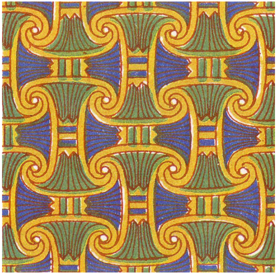


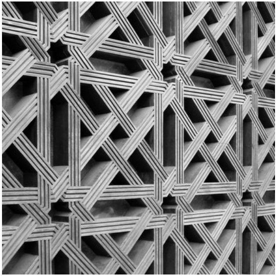
Персидский орнамент

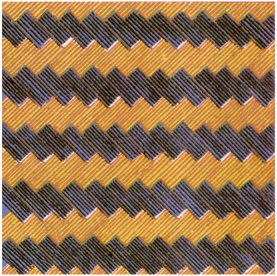
Задача

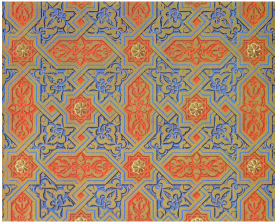
Классифицировать периодические орнаменты на плоскости.
Будем считать орнаменты одинаковыми, если у них одна и та же группа симметрии.

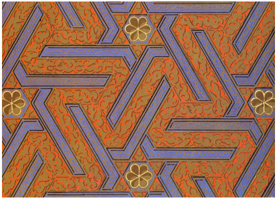
Примеры орнаментов











Группы Фёдорова

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).

Группы Фёдорова

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.

Группы Фёдорова

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.
- В пространстве таких групп уже 230.

Группы Фёдорова

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.
- В пространстве таких групп уже 230.
- Классифицированы в 1891 г. Е. С. Фёдоровым.

Группы Фёдорова

- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.
- В пространстве таких групп уже 230.
- Классифицированы в 1891 г. Е. С. Фёдоровым.
- Они описывают всевозможные кристаллические структуры.

Группы Фёдорова

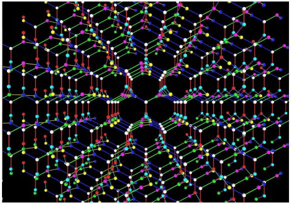
- Существует 17 групп симметрий периодических орнаментов на плоскости (они же — *кристаллографические группы*).
- Все они встречаются в мусульманском искусстве.
- В пространстве таких групп уже 230.
- Классифицированы в 1891 г. Е. С. Фёдоровым.
- Они описывают всевозможные кристаллические структуры.
- Порядок симметрии кристалла может быть равен 2, 3, 4 или 6.

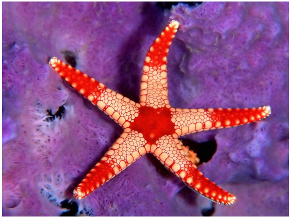
Евграф Степанович Фёдоров (1853–1919)

Живое и неживое

Герман Вейль:

«Хотя поворотная симметрия пятого порядка особенно часто встречается в органическом мире, она не обнаружена [...] среди кристаллов».





Герман Вейль (1885–1955)

Мозаики Пенроуза

- Периодических замощений с симметрией порядка 5 нет.

Мозаики Пенроуза

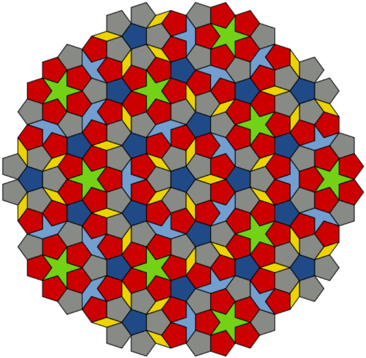
- Периодических замощений с симметрией порядка 5 нет.
- Однако имеются *квазипериодические* замощения!

Мозаики Пенроуза

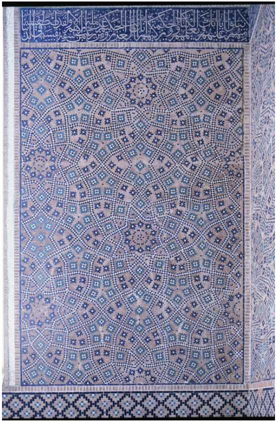
- Периодических замощений с симметрией порядка 5 нет.
- Однако имеются *квазипериодические* замощения!
- У них есть поворотная симметрия порядка 5, но нет симметрий типа «параллельный перенос».

Мозаики Пенроуза

- Периодических замощений с симметрией порядка 5 нет.
- Однако имеются *квазипериодические* замощения!
- У них есть поворотная симметрия порядка 5, но нет симметрий типа «параллельный перенос».
- Они называются *мозаиками Пенроуза.*



Мозаики Пенроуза



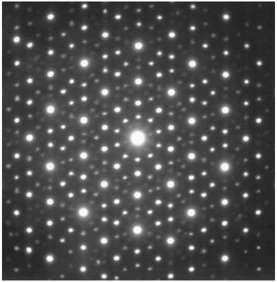
Орнамент в оформлении медресе Абдуллы-хана, Бухара, Узбекистан

Мозаики Пенроуза также встречаются в исламских орнаментах XIII-XV вв. на территории Ирана, Узбекистана, Афганистана, Индии...

См.: Peter J. Lu and Paul J. Steingardh, *Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture*, Science 315, 1106 (2007)

Сэр Роджер Пенроуз (р. 1931)

Мозаики Пенроуза и квазикристаллы



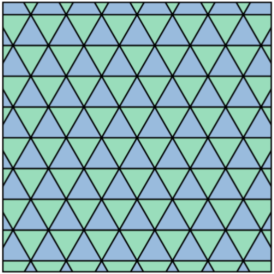
Икосаэдральный квазикристалл Ho-Mg-Zn

- Имеются квазикристаллические сплавы, кристаллическая решетка которых обладает осью симметрии пятого порядка.
- За открытие квазикристаллов Дан Шехтман был удостоен Нобелевской премии по химии за 2011 г.

Дан Шехтман (р. 1941)

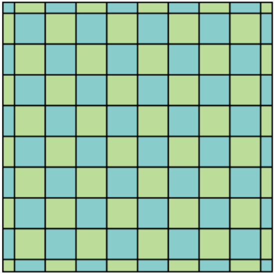
Замощения с помощью многоугольников

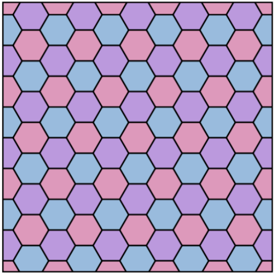
Периодический орнамент отвечает некоторому замощению плоскости. Например, плоскость можно замостить правильными треугольниками.



Замощения с помощью многоугольников

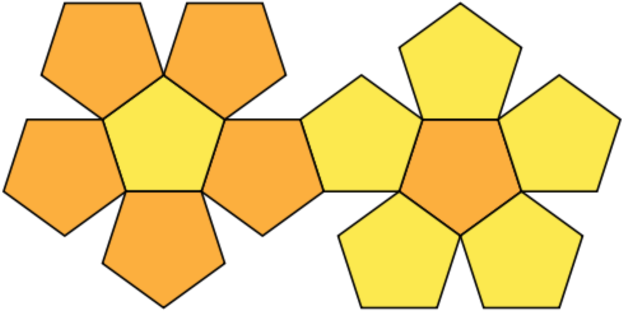
С квадратами и шестиугольниками это тоже удается:





Замощения с помощью многоугольников

А пятиугольниками замостить плоскость не получается...



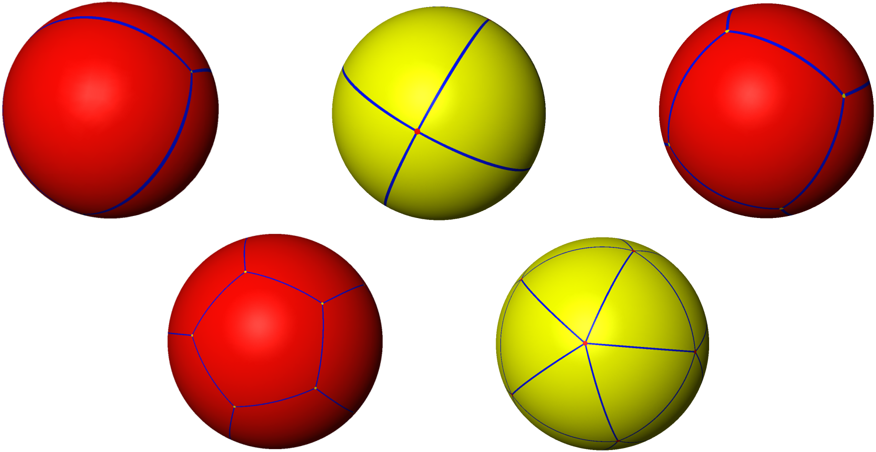
Зато ими можно замостить *сферу*:

Зато ими можно замостить *сферу*:

Получается додекаэдр!

Замощения с помощью многоугольников

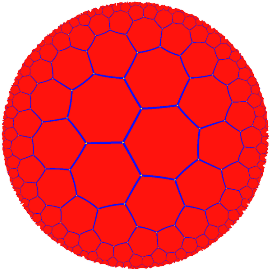
Все пять правильных многогранников отвечают замощениям сферы:



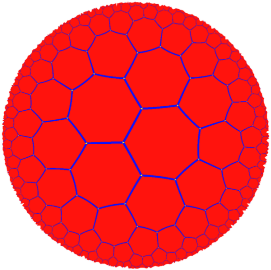
Замощения с помощью многоугольников

А как насчет семиугольников?

А как насчет семиугольников?
Ни плоскость, ни сферу ими замостить нельзя.
Зато можно замостить *плоскость Лобачевского:*

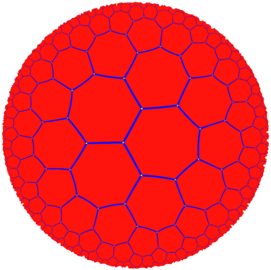


А как насчет семиугольников?
Ни плоскость, ни сферу ими замостить нельзя.
Зато можно замостить *плоскость Лобачевского:*



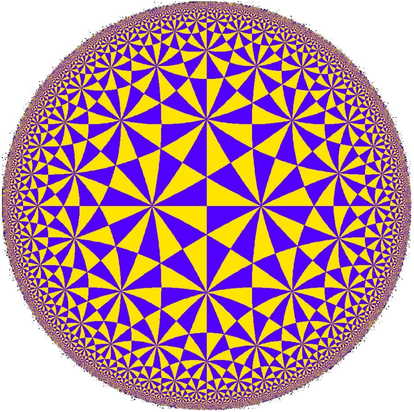
Здесь изображено разбиение плоскости Лобачевского
на равные (!) правильные (!!) семиугольники.

А как насчет семиугольников?
Ни плоскость, ни сферу ими замостить нельзя.
Зато можно замостить *плоскость Лобачевского:*

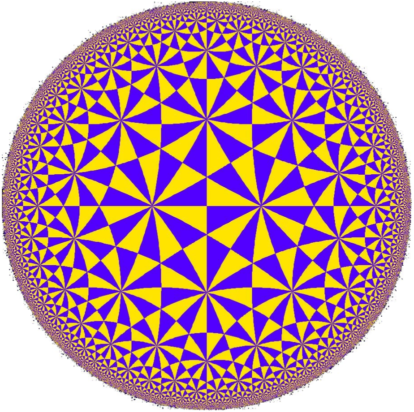


Здесь изображено разбиение плоскости Лобачевского
на равные (!) правильные (!!) семиугольники.
В каждой вершине сходятся три семиугольника.

Разобьём каждый семиугольник на треугольники.



Разобьём каждый семиугольник на треугольники.



Группа симметрий такого замощения называется *гиперболической группой отражений*.

Спасибо за внимание!

Мауриц Корнелиус Эшер. Круговой предел IV (Небеса и ад).

Что дальше?

Почитать:

- В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. М.: МЦНМО, 2002
- Г. Вейль. Симметрия. М.: Наука, 1968
- М. Гарднер. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. М.: Мир, 1993
- И. М. Парамонова. Симметрия в математике. М.: МЦНМО, 2000

Посмотреть:

- Dimensions. Une promenade mathématique. (Размерности. Математическая прогулка). Мультфильм. Доступен в YouTube на 8 языках, включая русский.

Поиграть:

- iOrnament. Приложение для iPhone/iPad. Доступно в AppStore.