Многочлены Шуберта и комплексы rc-графов

Е. Ю. Смирнов

Высшая школа экономики
факультет математики

Независимый московский университет

Конференция «Встреча поколений» фонда «Династия»
Москва, 10 июня 2015 г.

План

Многообразия флагов

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
- $B \subset G$ верхнетреугольные матрицы
- $Fl(n) = \{V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \mid \dim V_i = i\} \cong G/B$

Теорема (А. Борель, 1953)

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/(x_1 + \dots + x_n, \dots, x_1 \dots x_n) \cong H^*(G/B, \mathbb{Z}).$$

Этот изоморфизм строится так:

- $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ тавтологические векторные расслоения над G/B;
- $\mathcal{L}_i = \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ $(1 \leq i \leq n)$;
- $x_i \mapsto -c_1(\mathcal{L}_i)$;
- Ядро порождено симметрическими многочленами без свободного члена.

Многообразия флагов

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
- $B \subset G$ верхнетреугольные матрицы
- $Fl(n) = \{V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \mid \dim V_i = i\} \cong G/B$

Теорема (А. Борель, 1953)

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/(x_1 + \dots + x_n, \dots, x_1 \dots x_n) \cong H^*(G/B, \mathbb{Z}).$$

Этот изоморфизм строится так:

- $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ тавтологические векторные расслоения над G/B;
- $\mathcal{L}_i = \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ $(1 \leq i \leq n)$;
- $x_i \mapsto -c_1(\mathcal{L}_i)$;
- Ядро порождено симметрическими многочленами без свободного члена.

Многообразия флагов

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
- $B \subset G$ верхнетреугольные матрицы
- $Fl(n) = \{V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid \dim V_i = i\} \cong G/B$

Теорема (А. Борель, 1953)

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1 + \cdots + x_n, \ldots, x_1 \ldots x_n) \cong H^*(G/B, \mathbb{Z}).$$

Этот изоморфизм строится так:

- $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ тавтологические векторные расслоения над G/B;
- $\mathcal{L}_i = \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ $(1 \leq i \leq n)$;
- $x_i \mapsto -c_1(\mathcal{L}_i)$;
- Ядро порождено симметрическими многочленами без свободного члена.

Многообразия Шуберта

- $G/B = \bigsqcup_{w\in S_n} B^- wB/B$ — *разложение Шуберта*;
- $X^w = \overline{B^- wB/B}$, где B^- — противоположная борелевская подгруппа;
- $H^*(G/B,\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{w\in S_n} \mathbb{Z}\cdot [X^w]$ как абелевы группы.

Вопрос

Как описать «хорошие» представители классов $[X^w]$ в кольце $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$?

Ответ: многочлены Шуберта

- $w \in S_n \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{S}_w(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$;
- $\mathfrak{S}_w \mapsto [X^w] \in H^*(G/B,\mathbb{Z})$ при изоморфизме Бореля;
- Определение: А. Ласку, М.-П. Шютценберже, 1982;
- Комбинаторное описание: Н. Бержерон и С. Билли, А. Н. Кириллов и С. В. Фомин, 1993–1994.

Многообразия Шуберта

- $G/B = \bigsqcup_{w \in S_n} B^- wB/B$ — *разложение Шуберта*;
- $X^w = \overline{B^- wB/B}$, где B^- — противоположная борелевская подгруппа;
- $H^*(G/B, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{Z} \cdot [X^w]$ как абелевы группы.

Вопрос

Как описать «хорошие» представители классов $[X^w]$ в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$?

Ответ: многочлены Шуберта

- $w \in S_n \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{S}_w(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$;
- $\mathfrak{S}_w \mapsto [X^w] \in H^*(G/B, \mathbb{Z})$ при изоморфизме Бореля;
- Определение: А. Ласку, М.-П. Шютценберже, 1982;
- Комбинаторное описание: Н. Бержерон и С. Билли, А. Н. Кириллов и С. В. Фомин, 1993–1994.

Многообразия Шуберта

- $G/B = \bigsqcup_{w \in S_n} B^- wB/B$ — *разложение Шуберта*;
- $X^w = \overline{B^- wB/B}$, где B^- — противоположная борелевская подгруппа;
- $H^*(G/B, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{Z} \cdot [X^w]$ как абелевы группы.

Вопрос

Как описать «хорошие» представители классов $[X^w]$ в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$?

Ответ: многочлены Шуберта

- $w \in S_n \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{S}_w(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$;
- $\mathfrak{S}_w \mapsto [X^w] \in H^*(G/B, \mathbb{Z})$ при изоморфизме Бореля;
- Определение: А. Ласку, М.-П. Шютценберже, 1982;
- Комбинаторное описание: Н. Бержерон и С. Билли, А. Н. Кириллов и С. В. Фомин, 1993–1994.

rc-графы (reduced compatible), они же pipe dreams

Пусть $w \in S_n$. Рассмотрим треугольную таблицу, заполненную знаками $+$ и ⌟⌜, в которой:

- нити пересекаются, как предписано перестановкой w;
- никакие две нити не пересекаются дважды (*приведенность*).

Пример: rc-графы перестановки $w = (1432)$

rc-граф P $\rightsquigarrow$ моном $x^{d(P)} = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_{n-1}^{d_{n-1}}$,
$d_i = \#\{+ \text{ в } i\text{-й строке}\}$

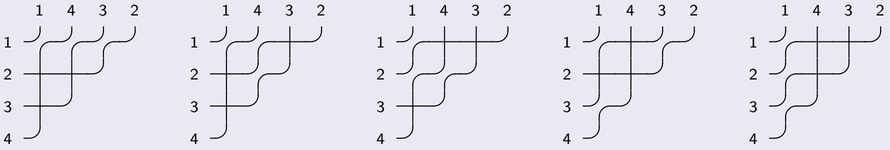
$x_2^2 x_3$ $\quad$ $x_1 x_2 x_3$ $\quad$ $x_1^2 x_3$ $\quad$ $x_1 x_2^2$ $\quad$ $x_1^2 x_2$

rc-графы (reduced compatible), они же pipe dreams

Пусть $w \in S_n$. Рассмотрим треугольную таблицу, заполненную знаками $+$ и ╯╭, в которой:

- нити пересекаются, как предписано перестановкой w;
- никакие две нити не пересекаются дважды (*приведенность*).

Пример: rc-графы перестановки $w = (1432)$



rc-граф P $\rightsquigarrow$ моном $x^{d(P)} = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_{n-1}^{d_{n-1}}$,
$d_i = \#\{+$ в i-й строке$\}$

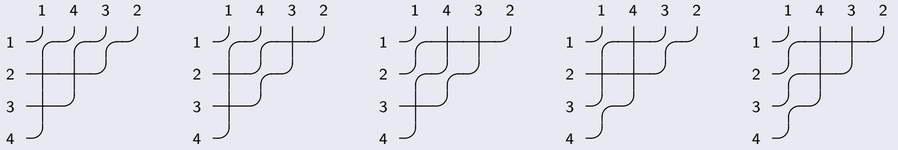
$x_2^2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1^2 x_3$	$x_1 x_2^2$	$x_1^2 x_2$

rc-графы (reduced compatible), они же pipe dreams

Пусть $w \in S_n$. Рассмотрим треугольную таблицу, заполненную знаками $+$ и ╯╭, в которой:

- нити пересекаются, как предписано перестановкой w;
- никакие две нити не пересекаются дважды (*приведенность*).

Пример: rc-графы перестановки $w = (1432)$



rc-граф P $\rightsquigarrow$ моном $x^{d(P)} = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_{n-1}^{d_{n-1}}$,
$d_i = \#\{+$ в i-й строке$\}$

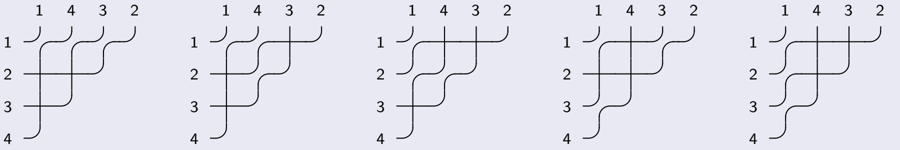
$x_2^2 x_3$ $x_1 x_2 x_3$ $x_1^2 x_3$ $x_1 x_2^2$ $x_1^2 x_2$

rc-графы (reduced compatible), они же pipe dreams

Пусть $w \in S_n$. Рассмотрим треугольную таблицу, заполненную знаками $+$ и ╯╭, в которой:

- нити пересекаются, как предписано перестановкой w;
- никакие две нити не пересекаются дважды (*приведенность*).

Пример: rc-графы перестановки $w = (1432)$



rc-граф $P \quad \rightsquigarrow \quad$ моном $x^{d(P)} = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_{n-1}^{d_{n-1}}$,
$d_i = \#\{+$ в i-й строке$\}$

$x_2^2 x_3 \qquad x_1 x_2 x_3 \qquad x_1^2 x_3 \qquad x_1 x_2^2 \qquad x_1^2 x_2$

rc-графы и многочлены Шуберта

Теорема (А. Н. Кириллов, С. В. Фомин, 1994)

Пусть $w \in S_n$. Тогда

$$\mathfrak{S}_w(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{w(P)=w} x^{d(P)},$$

где сумма берется по всем rc-графам P, соответствующим перестановке w.

Пример

$$\mathfrak{S}_{1432}(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2.$$

Следствие

$$\mathfrak{S}_w(1, \ldots, 1) = \#\{P \mid \text{ rc-граф } P \text{ соответствует } w\}.$$

rc-графы и многочлены Шуберта

Теорема (А. Н. Кириллов, С. В. Фомин, 1994)

Пусть $w \in S_n$. Тогда

$$\mathfrak{S}_w(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{w(P)=w} x^{d(P)},$$

где сумма берется по всем rc-графам P, соответствующим перестановке w.

Пример

$$\mathfrak{S}_{1432}(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2.$$

Следствие

$$\mathfrak{S}_w(1, \ldots, 1) = \#\{P \mid \text{ rc-граф } P \text{ соответствует } w\}.$$

rc-графы и многочлены Шуберта

Теорема (А. Н. Кириллов, С. В. Фомин, 1994)

Пусть $w \in S_n$. Тогда

$$\mathfrak{S}_w(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{w(P)=w} x^{d(P)},$$

где сумма берется по всем rc-графам P, соответствующим перестановке w.

Пример

$$\mathfrak{S}_{1432}(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2.$$

Следствие

$$\mathfrak{S}_w(1, \ldots, 1) = \#\{P \mid \text{ rc-граф } P \text{ соответствует } w\}.$$

rc-графы и действие тора

Торическое вырождение многообразия флагов (Н. Гончулеа, В. Лакшмибаи)

$$Fl(n) \to \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{Fl}(n)$ — *особое* (но неприводимое!) торическое многообразие.
- Оно соответствует многограннику Гельфанда–Цетлина $GZ(n)$.

Вырожденные многообразия Шуберта (А. Кнутсон, М. Коган, Э. Миллер)

$$X^w \to \widetilde{X}^w \subset \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{X}^w$ может быть приводимым!
- Его неприводимые компоненты нумеруются rc-графами, отвечающими перестановке w.

Торическое вырождение многообразия флагов (Н. Гончулеа, В. Лакшмибаи)

$$Fl(n) \to \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{Fl}(n)$ — *особое* (но неприводимое!) торическое многообразие.
- Оно соответствует многограннику Гельфанда–Цетлина $GZ(n)$.

Вырожденные многообразия Шуберта (А. Кнутсон, М. Коган, Э. Миллер)

$$X^w \to \widetilde{X}^w \subset \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{X}^w$ может быть приводимым!
- Его неприводимые компоненты нумеруются rc-графами, отвечающими перестановке w.

rc-графы и действие тора

Торическое вырождение многообразия флагов (Н. Гончулеа, В. Лакшмибаи)

$$Fl(n) \to \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{Fl}(n)$ — *особое* (но неприводимое!) торическое многообразие.
- Оно соответствует многограннику Гельфанда–Цетлина $GZ(n)$.

Вырожденные многообразия Шуберта (А. Кнутсон, М. Коган, Э. Миллер)

$$X^w \to \widetilde{X}^w \subset \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{X}^w$ может быть приводимым!
- Его неприводимые компоненты нумеруются rc-графами, отвечающими перестановке w.

rc-графы и действие тора

Торическое вырождение многообразия флагов (Н. Гончулеа, В. Лакшмибаи)

$$Fl(n) \to \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{Fl}(n)$ — *особое* (но неприводимое!) торическое многообразие.
- Оно соответствует многограннику Гельфанда–Цетлина $GZ(n)$.

Вырожденные многообразия Шуберта (А. Кнутсон, М. Коган, Э. Миллер)

$$X^w \to \widetilde{X}^w \subset \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{X}^w$ может быть приводимым!
- Его неприводимые компоненты нумеруются rc-графами, отвечающими перестановке w.

rc-графы и действие тора

Торическое вырождение многообразия флагов (Н. Гончулеа, В. Лакшмибаи)

$$Fl(n) \to \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{Fl}(n)$ — *особое* (но неприводимое!) торическое многообразие.
- Оно соответствует многограннику Гельфанда–Цетлина $GZ(n)$.

Вырожденные многообразия Шуберта (А. Кнутсон, М. Коган, Э. Миллер)

$$X^w \to \widetilde{X}^w \subset \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{X}^w$ может быть приводимым!
- Его неприводимые компоненты нумеруются rc-графами, отвечающими перестановке w.

rc-графы и действие тора

Торическое вырождение многообразия флагов (Н. Гончулеа, В. Лакшмибаи)

$$Fl(n) \to \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{Fl}(n)$ — *особое* (но неприводимое!) торическое многообразие.
- Оно соответствует многограннику Гельфанда–Цетлина $GZ(n)$.

Вырожденные многообразия Шуберта (А. Кнутсон, М. Коган, Э. Миллер)

$$X^w \to \widetilde{X}^w \subset \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{X}^w$ может быть приводимым!
- Его неприводимые компоненты нумеруются rc-графами, отвечающими перестановке w.

rc-графы и действие тора

Торическое вырождение многообразия флагов (Н. Гончулеа, В. Лакшмибаи)

$$Fl(n) \to \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{Fl}(n)$ — *особое* (но неприводимое!) торическое многообразие.
- Оно соответствует многограннику Гельфанда–Цетлина $GZ(n)$.

Вырожденные многообразия Шуберта (А. Кнутсон, М. Коган, Э. Миллер)

$$X^w \to \widetilde{X}^w \subset \widetilde{Fl}(n)$$

- $\widetilde{X}^w$ может быть приводимым!
- Его неприводимые компоненты нумеруются rc-графами, отвечающими перестановке w.

Перестановки с максимальным числом rc-графов

Сколько rc-графов может быть у перестановки?

Для какой перестановки $w \in S_n$ число $\mathfrak{S}_w(1, \dots, 1)$ *максимально*?

Ответы при малых n

- $n = 3$: $w = (132)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 2$;
- $n = 4$: $w = (1432)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 5$;
- $n = 5$: $w = (15432)$ and $w = (12543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 14$;
- $n = 6$: $w = (126543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 84$;
- $n = 7$: $w = (1327654)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 660$.

Определение: ричардсоновские перестановки

$w \in S_n$ — *ричардсоновская*, если найдутся $(k_1, \dots, k_r)$, $\sum k_i = n$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots k_1 & k_1+1 & \dots & k_1+k_2 & k_1+k_2+1 & \dots \\ k_1 & k_1-1 & \dots 1 & k_1+k_2 & \dots & k_1+1 & k_1+k_2+k_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Перестановки с максимальным числом rc-графов

Сколько rc-графов может быть у перестановки?

Для какой перестановки $w \in S_n$ число $\mathfrak{S}_w(1, \ldots, 1)$ *максимально*?

Ответы при малых n

- $n = 3$: $w = (132)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 2$;
- $n = 4$: $w = (1432)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 5$;
- $n = 5$: $w = (15432)$ and $w = (12543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 14$;
- $n = 6$: $w = (126543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 84$;
- $n = 7$: $w = (1327654)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 660$.

Определение: ричардсоновские перестановки

$w \in S_n$ — *ричардсоновская*, если найдутся $(k_1, \ldots, k_r)$, $\sum k_i = n$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots k_1 & k_1+1 & \ldots & k_1+k_2 & k_1+k_2+1 & \ldots \\ k_1 & k_1-1 & \ldots 1 & k_1+k_2 & \ldots & k_1+1 & k_1+k_2+k_3 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Перестановки с максимальным числом rc-графов

Сколько rc-графов может быть у перестановки?

Для какой перестановки $w \in S_n$ число $\mathfrak{S}_w(1, \dots, 1)$ *максимально*?

Ответы при малых n

- $n = 3$: $w = (132)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 2$;
- $n = 4$: $w = (1432)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 5$;
- $n = 5$: $w = (15432)$ and $w = (12543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 14$;
- $n = 6$: $w = (126543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 84$;
- $n = 7$: $w = (1327654)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 660$.

Определение: ричардсоновские перестановки

$w \in S_n$ — *ричардсоновская*, если найдутся $(k_1, \dots, k_r)$, $\sum k_i = n$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots k_1 & k_1+1 & \dots & k_1+k_2 & k_1+k_2+1 & \dots \\ k_1 & k_1-1 & \dots 1 & k_1+k_2 & \dots & k_1+1 & k_1+k_2+k_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Перестановки с максимальным числом rc-графов

Сколько rc-графов может быть у перестановки?

Для какой перестановки $w \in S_n$ число $\mathfrak{S}_w(1, \ldots, 1)$ *максимально*?

Ответы при малых n

- $n = 3$: $w = (132)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 2$;
- $n = 4$: $w = (1432)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 5$;
- $n = 5$: $w = (15432)$ and $w = (12543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 14$;
- $n = 6$: $w = (126543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 84$;
- $n = 7$: $w = (1327654)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 660$.

Определение: ричардсоновские перестановки

$w \in S_n$ — *ричардсоновская*, если найдутся $(k_1, \ldots, k_r)$, $\sum k_i = n$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots k_1 & k_1+1 & \ldots & k_1+k_2 & k_1+k_2+1 & \ldots \\ k_1 & k_1-1 & \ldots 1 & k_1+k_2 & \ldots & k_1+1 & k_1+k_2+k_3 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Перестановки с максимальным числом rc-графов

Сколько rc-графов может быть у перестановки?

Для какой перестановки $w \in S_n$ число $\mathfrak{S}_w(1, \dots, 1)$ *максимально*?

Ответы при малых n

- $n = 3$: $w = (132)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 2$;
- $n = 4$: $w = (1432)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 5$;
- $n = 5$: $w = (15432)$ and $w = (12543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 14$;
- $n = 6$: $w = (126543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 84$;
- $n = 7$: $w = (1327654)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 660$.

Определение: ричардсоновские перестановки

$w \in S_n$ — *ричардсоновская*, если найдутся $(k_1, \dots, k_r)$, $\sum k_i = n$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots k_1 & k_1+1 & \dots & k_1+k_2 & k_1+k_2+1 & \dots \\ k_1 & k_1-1 & \dots 1 & k_1+k_2 & \dots & k_1+1 & k_1+k_2+k_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Перестановки с максимальным числом rc-графов

Сколько rc-графов может быть у перестановки?

Для какой перестановки $w \in S_n$ число $\mathfrak{S}_w(1, \dots, 1)$ *максимально*?

Ответы при малых n

- $n = 3$: $w = (132)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 2$;
- $n = 4$: $w = (1432)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 5$;
- $n = 5$: $w = (15432)$ and $w = (12543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 14$;
- $n = 6$: $w = (126543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 84$;
- $n = 7$: $w = (1327654)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 660$.

Определение: ричардсоновские перестановки

$w \in S_n$ — *ричардсоновская*, если найдутся $(k_1, \dots, k_r)$, $\sum k_i = n$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots k_1 & k_1+1 & \dots & k_1+k_2 & k_1+k_2+1 & \dots \\ k_1 & k_1-1 & \dots 1 & k_1+k_2 & \dots & k_1+1 & k_1+k_2+k_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Перестановки с максимальным числом rc-графов

Сколько rc-графов может быть у перестановки?

Для какой перестановки $w \in S_n$ число $\mathfrak{S}_w(1, \ldots, 1)$ *максимально*?

Ответы при малых n

- $n = 3$: $w = (132)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 2$;
- $n = 4$: $w = (1432)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 5$;
- $n = 5$: $w = (15432)$ and $w = (12543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 14$;
- $n = 6$: $w = (126543)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 84$;
- $n = 7$: $w = (1327654)$, $\mathfrak{S}_w(1) = 660$.

Определение: ричардсоновские перестановки

$w \in S_n$ — *ричардсоновская*, если найдутся $(k_1, \ldots, k_r)$, $\sum k_i = n$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots k_1 & {\color{blue} k_1+1} & {\color{blue}\ldots} & {\color{blue} k_1+k_2} & {\color{green} k_1+k_2+1} & {\color{green}\ldots} \\ k_1 & k_1-1 & \ldots 1 & {\color{blue} k_1+k_2} & {\color{blue}\ldots} & {\color{blue} k_1+1} & {\color{green} k_1+k_2+k_3} & {\color{green}\ldots} \end{pmatrix}.$$

Подсчет числа rc-графов для ричардсоновских перестановок

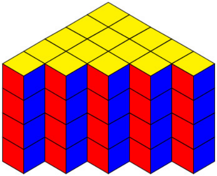
Пусть $w^0_{k,m} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & k+m \\ 1 & 2 & \dots & k & k+m & \dots & k+1 \end{pmatrix}$.

Теорема (А. Ву, 2004)

Пусть $w = w^0_{1,m}$. Тогда $\mathfrak{S}_w(1) = Cat(m)$.

Теорема (А. Н. Кириллов, С. В. Фомин)

Пусть $w = w^0_{k,m}$. Тогда $\mathfrak{S}_w(1)$ равно числу «плоских разбиений Дика высоты k», лежащих внутри призмы высоты k и с основанием m.



Подсчет числа rc-графов для ричардсоновских перестановок

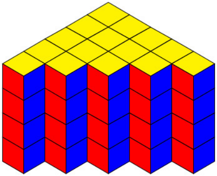
Пусть $w^0_{k,m} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & k+m \\ 1 & 2 & \dots & k & k+m & \dots & k+1 \end{pmatrix}$.

Теорема (А. Ву, 2004)

Пусть $w = w^0_{1,m}$. Тогда $\mathfrak{S}_w(1) = Cat(m)$.

Теорема (А. Н. Кириллов, С. В. Фомин)

Пусть $w = w^0_{k,m}$. Тогда $\mathfrak{S}_w(1)$ равно числу «плоских разбиений Дика высоты k», лежащих внутри призмы высоты k и с основанием m.



Подсчет числа rc-графов для ричардсоновских перестановок

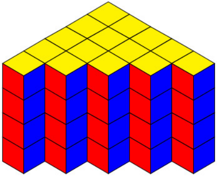
Пусть $w^0_{k,m} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & k+m \\ 1 & 2 & \dots & k & k+m & \dots & k+1 \end{pmatrix}$.

Теорема (А. Ву, 2004)

Пусть $w = w^0_{1,m}$. Тогда $\mathfrak{S}_w(1) = Cat(m)$.

Теорема (А. Н. Кириллов, С. В. Фомин)

Пусть $w = w^0_{k,m}$. Тогда $\mathfrak{S}_w(1)$ равно числу «плоских разбиений Дика высоты k», лежащих внутри призмы высоты k и с основанием m.



Детерминантные формулы для многочленов Шуберта

Теорема (Г. А. Мерзон, Е. С., 2014)

Пусть $w = w^0_{k,m}$. Тогда имеет место следующая формула «типа Якоби–Труди»:

$$\frac{\mathfrak{S}_w(x_1,\dots,x_{m+k-1})}{x_1^m \dots x_k^m x_{k+1}^{m-1} \dots x_{m+k-1}} = \det\left(\frac{\mathfrak{S}_{w^0_{1,m+i+j}}(x_{i+1},\dots,x_{m+i+j-1})}{x_{i+1}^{m+j-1} x_2^{m+j-2} \dots x_{m+i+j-1}}\right)_{i,j=0}^{k-1}$$

Следствие

$\mathfrak{S}_w(1)$ равняется определителю Каталана–Ганкеля порядка k:

$$\mathfrak{S}_w(1) = \det\begin{pmatrix} Cat(m) & Cat(m+1) & \dots & Cat(m+k-1) \\ Cat(m+1) & Cat(m+2) & \dots & Cat(m+k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cat(m+k-1) & Cat(m+k) & \dots & Cat(m+2k-2) \end{pmatrix}.$$

Детерминантные формулы для многочленов Шуберта

Теорема (Г. А. Мерзон, Е. С., 2014)

Пусть $w = w^0_{k,m}$. Тогда имеет место следующая формула «типа Якоби–Труди»:

$$\frac{\mathfrak{S}_w(x_1,\dots,x_{m+k-1})}{x_1^m\dots x_k^m x_{k+1}^{m-1}\dots x_{m+k-1}} = \det\left(\frac{\mathfrak{S}_{w^0_{1,m+i+j}}(x_{i+1},\dots,x_{m+i+j-1})}{x_{i+1}^{m+j-1}x_2^{m+j-2}\dots x_{m+i+j-1}}\right)_{i,j=0}^{k-1}$$

Следствие

$\mathfrak{S}_w(1)$ равняется определителю Каталана–Ганкеля порядка k:

$$\mathfrak{S}_w(1) = \det\begin{pmatrix} Cat(m) & Cat(m+1) & \dots & Cat(m+k-1) \\ Cat(m+1) & Cat(m+2) & \dots & Cat(m+k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cat(m+k-1) & Cat(m+k) & \dots & Cat(m+2k-2) \end{pmatrix}.$$

Комплекс rc-графов (А. Кнутсон, Э. Миллер)

- По перестановке $w \in S_n$ можно построить расшелушиваемый (shellable) CW-комплекс $PD(w)$;
- 0-мерные клетки $\leftrightarrow$ rc-графы перестановки w;
- клетки высших размерностей $\leftrightarrow$ неприведенные pipe dreams для w;
- $PD(w) \cong B^{\ell}$ или S^{ℓ}, где $\ell = \ell(w)$.

Комплекс rc-графов (А. Кнутсон, Э. Миллер)

- По перестановке $w \in S_n$ можно построить расшелушиваемый (shellable) CW-комплекс $PD(w)$;
- 0-мерные клетки $\leftrightarrow$ rc-графы перестановки w;
- клетки высших размерностей $\leftrightarrow$ неприведенные pipe dreams для w;
- $PD(w) \cong B^{\ell}$ или S^{ℓ}, где $\ell = \ell(w)$.

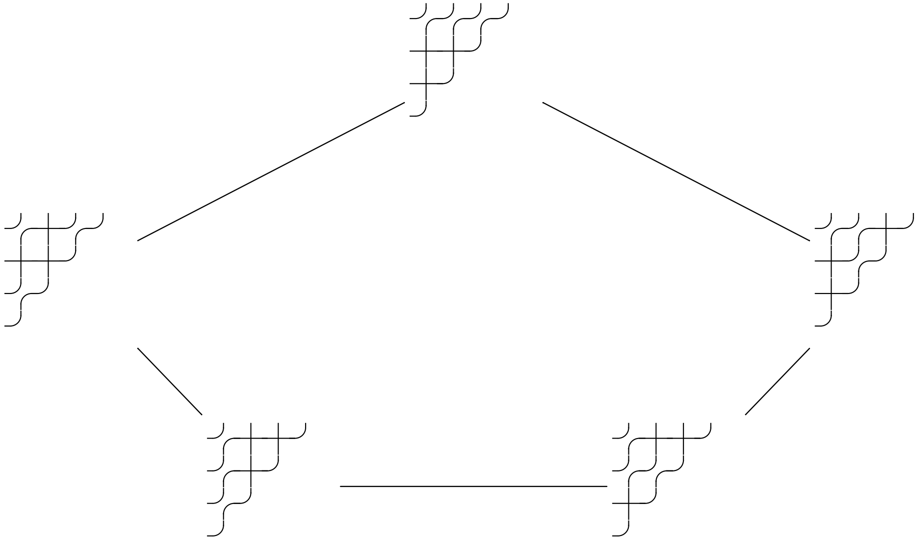
Комплекс rc-графов (А. Кнутсон, Э. Миллер)

- По перестановке $w \in S_n$ можно построить расшелушиваемый (shellable) CW-комплекс $PD(w)$;
- 0-мерные клетки $\leftrightarrow$ rc-графы перестановки w;
- клетки высших размерностей $\leftrightarrow$ неприведенные pipe dreams для w;
- $PD(w) \cong B^\ell$ или S^ℓ, где $\ell = \ell(w)$.

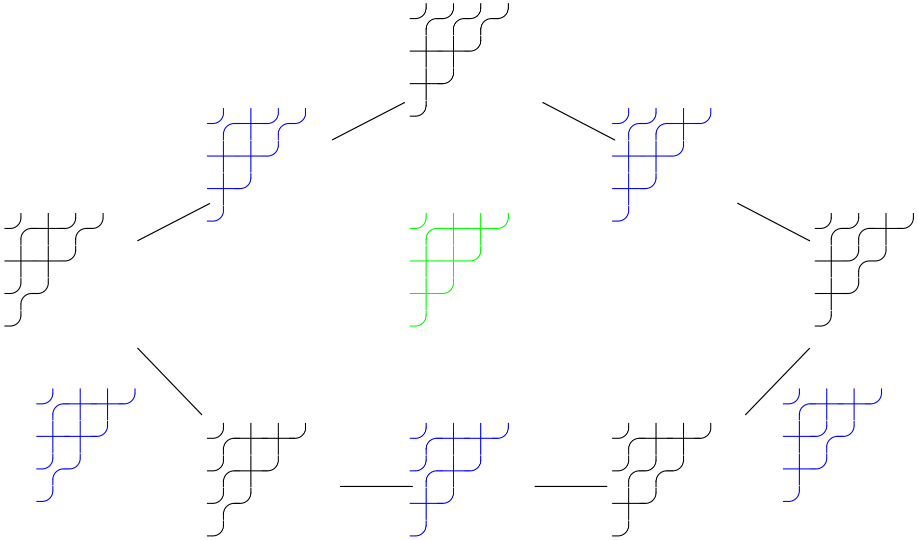
Комплекс rc-графов (А. Кнутсон, Э. Миллер)

- По перестановке $w \in S_n$ можно построить расшелушиваемый (shellable) CW-комплекс $PD(w)$;
- 0-мерные клетки $\leftrightarrow$ rc-графы перестановки w;
- клетки высших размерностей $\leftrightarrow$ неприведенные pipe dreams для w;
- $PD(w) \cong B^\ell$ или S^ℓ, где $\ell = \ell(w)$.

Комплекс rc-графов для $w = (1432)$



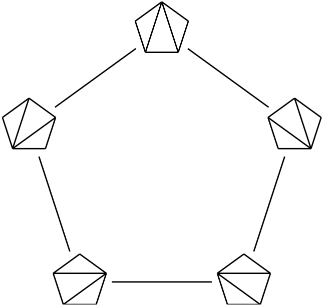
Комплекс rc-графов для $w = (1432)$

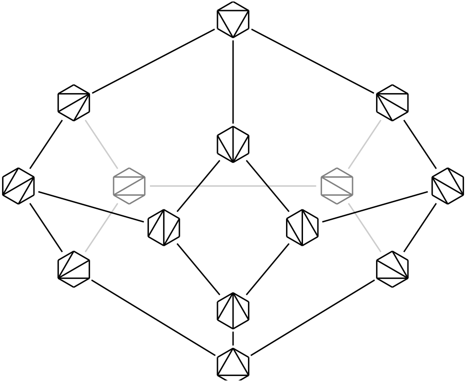


Ассоциаэдры — комплексы rc-графов

Теорема (фольклор? см. также В. Пило)

Пусть $w = w^0_{1,n} = (1, n+1, n, \ldots, 3, 2) \in S_{n+1}$ как в теореме Ву. Тогда $PD(w)$ — ассоциаэдр Сташеффа.

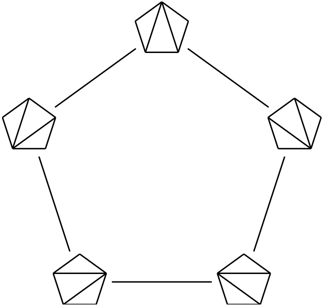


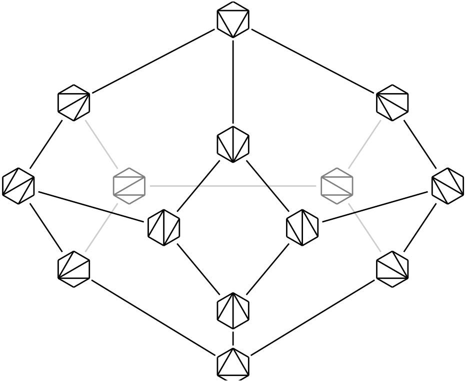


Ассоциаэдры — комплексы rc-графов

Теорема (фольклор? см. также В. Пило)

Пусть $w = w^0_{1,n} = (1, n+1, n, \ldots, 3, 2) \in S_{n+1}$ как в теореме Ву. Тогда $PD(w)$ — ассоциаэдр Сташеффа.





Зоопарк комплексов rc-графов

Как выглядят $PD(w)$ для других ричардсоновских w?

- $w = w^0_{1,n} = (1, n+1, n, \ldots, 3, 2)$
  ассоциаэдр;
- $w = w^0_{n,2} = (1, 2, \ldots, n, n+2, n+1)$
  $(n+1)$-мерный симплекс;
- $w = w^0_{n,3} = (1, 2, \ldots, n, n+3, n+2, n+1)$
  двойственный циклический многогранник $(C(2n+3, 2n))^\vee$.
- $w = w^0_{k,n}$
  ???
  (неясно, многогранник ли это)

Циклический многогранник

$$C(n, d) = Conv((t_i, t_i^2, \ldots, t_i^d))_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d.$$

Зоопарк комплексов rc-графов

Как выглядят $PD(w)$ для других ричардсоновских w?

- $w = w^0_{1,n} = (1, n+1, n, \dots, 3, 2)$
  ассоциаэдр;
- $w = w^0_{n,2} = (1, 2, \dots, n, n+2, n+1)$
  $(n+1)$-мерный симплекс;
- $w = w^0_{n,3} = (1, 2, \dots, n, n+3, n+2, n+1)$
  двойственный циклический многогранник $(C(2n+3, 2n))^\vee$.
- $w = w^0_{k,n}$
  ???
  (неясно, многогранник ли это)

Циклический многогранник

$$C(n, d) = Conv((t_i, t_i^2, \dots, t_i^d))_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d.$$

Зоопарк комплексов rc-графов

Как выглядят $PD(w)$ для других ричардсоновских w?

- $w = w^0_{1,n} = (1, n+1, n, \dots, 3, 2)$
  ассоциаэдр;
- $w = w^0_{n,2} = (1, 2, \dots, n, n+2, n+1)$
  $(n+1)$-мерный симплекс;
- $w = w^0_{n,3} = (1, 2, \dots, n, n+3, n+2, n+1)$
  двойственный циклический многогранник $(C(2n+3, 2n))^\vee$.
- $w = w^0_{k,n}$
  ???
  (неясно, многогранник ли это)

Циклический многогранник

$$C(n,d) = Conv((t_i, t_i^2, \dots, t_i^d))_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d.$$

Зоопарк комплексов rc-графов

Как выглядят $PD(w)$ для других ричардсоновских w?

- $w = w^0_{1,n} = (1, n+1, n, \ldots, 3, 2)$
  ассоциаэдр;
- $w = w^0_{n,2} = (1, 2, \ldots, n, n+2, n+1)$
  $(n+1)$-мерный симплекс;
- $w = w^0_{n,3} = (1, 2, \ldots, n, n+3, n+2, n+1)$
  двойственный циклический многогранник $(C(2n+3, 2n))^\vee$.
- $w = w^0_{k,n}$
  ???
  (неясно, многогранник ли это)

Циклический многогранник

$$C(n, d) = Conv((t_i, t_i^2, \ldots, t_i^d))_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d.$$

Зоопарк комплексов rc-графов

Как выглядят $PD(w)$ для других ричардсоновских w?

- $w = w^0_{1,n} = (1, n+1, n, \dots, 3, 2)$
  ассоциаэдр;
- $w = w^0_{n,2} = (1, 2, \dots, n, n+2, n+1)$
  $(n+1)$-мерный симплекс;
- $w = w^0_{n,3} = (1, 2, \dots, n, n+3, n+2, n+1)$
  двойственный циклический многогранник $(C(2n+3, 2n))^\vee$.
- $w = w^0_{k,n}$
  ???
  (неясно, многогранник ли это)

Циклический многогранник

$$C(n,d) = Conv((t_i, t_i^2, \dots, t_i^d))_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^d.$$

Обобщение: другие группы Вейля

- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом*.
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^\circ$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^\circ)$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

Обобщение: другие группы Вейля

- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом*.
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^0$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^0)$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

Обобщение: другие группы Вейля

- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом.*
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^{o}$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^{o})$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

Обобщение: другие группы Вейля

- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом*.
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^0$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^0)$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

Обобщение: другие группы Вейля

- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом*.
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^0$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^0)$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

Обобщение: другие группы Вейля

- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом*.
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^0$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^0)$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

Обобщение: другие группы Вейля

- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом*.
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^o$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^o)$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

Обобщение: другие группы Вейля

- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом*.
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^0$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^0)$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

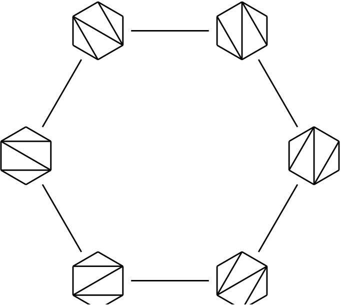
Обобщение: другие группы Вейля

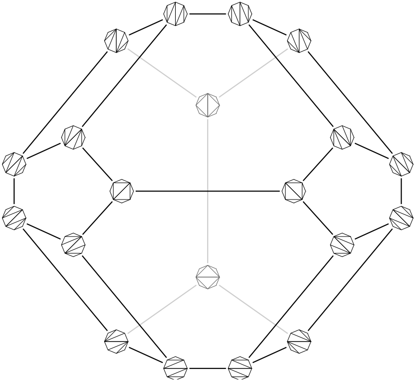
- G — полупростая группа, W — ее группа Вейля;
- *Самый длинный элемент* в W обозначается через w^0;
- $P \subset G$ параболическая подгруппа, $P = L \rtimes U$ ее разложение Леви.
- Самый длинный элемент $w^0(L) \in W(L) \subset W$ для L называется *ричардсоновским элементом*.
- Для $W = S_n$ это в точности наше предыдущее определение ричардсоновского элемента.
- Зафиксируем приведенное разложение $\mathfrak{w}^0$ самого длинного элемента $w^0 \in W$.
- Можно определить *комплекс подслов* $PD(w) = PD(w, \mathfrak{w}^0)$ для произвольного $w \in W$: обобщение комплекса rc-графов (Кнутсон, Миллер).
- Будем рассматривать разложения ричардсоновских элементов в W и их комплексы подслов.

Циклоэдры — комплексы подслов

Теорема

Пусть W имеет тип C_n и порождена $s_1, \ldots, s_n$, где s_1 соответствует длинному корню α_1. Рассмотрим ричардсоновский элемент $w = (s_1 s_2 \ldots s_{n-1})^{n-1}$. Тогда $PD(w)$ — циклоэдр.





Вопросы о $PD(w)$

- Верно ли, что $PD(w)$ — всегда многогранник?
- А верно ли это для ричардсоновского элемента w?
- Если да, каков комбинаторный смысл этого многогранника?
- Возможный ответ: ассоциаэдры, циклоэдры и т.д. являются примерами *2-усеченных кубов* (см. работы В. М. Бухштабера). Верно ли, что $PD(w)$ являются 2-усеченными кубами?

Вопросы о $PD(w)$

- Верно ли, что $PD(w)$ — всегда многогранник?
- А верно ли это для ричардсоновского элемента w?
- Если да, каков комбинаторный смысл этого многогранника?
- Возможный ответ: ассоциаэдры, циклоэдры и т.д. являются примерами *2-усеченных кубов* (см. работы В. М. Бухштабера). Верно ли, что $PD(w)$ являются 2-усеченными кубами?

Вопросы о $PD(w)$

- Верно ли, что $PD(w)$ — всегда многогранник?
- А верно ли это для ричардсоновского элемента w?
- Если да, каков комбинаторный смысл этого многогранника?
- Возможный ответ: ассоциаэдры, циклоэдры и т.д. являются примерами *2-усеченных кубов* (см. работы В. М. Бухштабера). Верно ли, что $PD(w)$ являются 2-усеченными кубами?

Вопросы о $PD(w)$

- Верно ли, что $PD(w)$ — всегда многогранник?
- А верно ли это для ричардсоновского элемента w?
- Если да, каков комбинаторный смысл этого многогранника?
- Возможный ответ: ассоциаэдры, циклоэдры и т.д. являются примерами *2-усеченных кубов* (см. работы В. М. Бухштабера). Верно ли, что $PD(w)$ являются 2-усеченными кубами?

Фонд Дмитрия Зимина

Династия

Спасибо!