СЛАЙД-КОМПЛЕКСЫ И КОМПЛЕКСЫ ПОДСЛОВ

Е. Ю. Смирнов, А. А. Тутубалина

1. Введение. А. Кнутсон и Э. Миллер в [4] построили грёбнеровское плоское вырождение матричных многообразий Шуберта, особым слоем для которого является объединение аффинных плоскостей. Комбинаторная структура этого объединения плоскостей задается некоторым симплициальным комплексом: *комплексом подслов.* В [3] теми же авторами было показано, что топологически комплекс подслов гомеоморфен шару или сфере. Это позволило им показать, что мультистепень матричного многообразия Шуберта $\overline{X_w}$ относительно действия группы диагональных матриц $T \subset \mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{Mat}(n)$ совпадает с многочленом Шуберта $\mathfrak{S}_w$, определенным в [5], и получается как сумма некоторых мономов по гиперграням комплекса подслов. Отсюда получаются новые доказательства нормальности, коэн-маколеевости и рациональности особенностей для многообразий Шуберта.

С. Ассаф и Д. Сирлз [1] определили *слайд-многочлены.* Это семейство многочленов, через которые выражаются с коэффициентами 0 или 1 многочлены Шуберта и для которых существует комбинаторно положительное правило Литтлвуда–Ричардсона. В настоящей работе мы строим стратификацию комплексов подслов с помощью так называемых *слайд-комплексов*, которая отвечает разложению многочлена Шуберта в сумму слайд-многочленов; подробности см. в нашей работе [6]. Основной результат настоящей работы состоит в том, что слайд-комплексы также гомеоморфны шару или сфере.

2. Комплексы подслов. Пусть Π — группа Кокстера, Σ — множество её простых отражений. В качестве фундаментального примера можно рассматривать группу перестановок $\Pi = S_n$ и множество простых транспозиций $\Sigma = \{s_i = (i \leftrightarrow i+1), i < n\}$. *Словом* называется конечная последовательность $Q = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ элементов Σ, *подсловом* — подпоследовательность в Q. Говорят, что слово Q *представляет* элемент $\pi \in \Pi$, если $\pi = \sigma_1 \ldots \sigma_m$, и *содержит* π, если какое-то подслово в Q представляет π. *Длина* $\ell(\pi)$ элемента π — это минимальная длина представляющего его слова.

Напомним основные результаты из работы [3].

Определение 2.1. *Комплекс подслов* $\Delta(Q, \pi)$ — это множество непустых подслов $Q \smallsetminus P$, дополнения которых P содержат π. Это симплициальный комплекс; одна его грань содержится в другой грани в том и только том случае, когда первое из соответствующих подслов является подмножеством второго.

Все приведенные слова для $\pi \in \Pi$ имеют одну и ту же длину, так что $\Delta(Q, \pi)$ — чистый комплекс размерности $m - \ell(\pi)$. Его гиперграни $Q \smallsetminus P$ отвечают словам P, представляющим элемент π.

Определение 2.2. *Шеллинг* (shelling) симплициального комплекса Δ — это такой полный порядок на его гипергранях F_i, для которого при любых $1 \leqslant i < j \leqslant t$, существует k, где $1 \leqslant k < j$, и вершина $v \in F_j$, для которых $F_i \cap F_j \subseteq F_k \cap F_j = F_j \smallsetminus \{v\}$. Комплекс, обладающий шеллингом, называется *шеллинговым.*

Теорема 2.3 ([3, Thm 2.5]). *Комплексы подслов являются шеллинговыми.*

Определение 2.4. *Произведение Демазюра* $\delta(Q) \in \Pi$ слова Q индуктивно определяется по правилу: $\delta(\sigma) = \sigma$ при $\sigma \in \Sigma$, и $\delta(Q, \sigma) = \delta(Q)\sigma$ при $\ell(\delta(Q)\sigma) > \ell(\delta(Q))$, и $\delta(Q)$ в противном случае. См. также [3, Def. 3.1].

Теорема 2.5 ([3, Thm 3.7, Cor. 3.8]). *Комплекс* $\Delta(Q, \pi)$ *гомеоморфен сфере, если* $\delta(Q) = \pi$, *и шару в противном случае.*

Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100», РФФИ (грант 20-01-00091-а) и фонда Дж. Саймонса (Simons–IUM Fellowship).

3. Слайд-комплексы.

Определение 3.1. Пусть Q, S — слова в алфавите Σ. *Слайд-комплексом подслов* $\widetilde{\Delta}(Q,S)$ назовем множество подслов $Q \setminus P$, дополнения P к которым содержат S в качестве подслова. Аналогично определению 2.1 такие подслова отвечают граням чистого симплициального комплекса.

Теорема 3.2. *Слайд-комплексы являются шеллинговыми.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.5 из [3].

Введем аналог произведения Демазюра для подслов.

Определение 3.3. Слово $\widetilde{\delta}(Q)$ получается из слова Q заменой каждой максимальной группы подряд идущих одинаковых букв $s_i \dots s_i$ на одну букву s_i.

Лемма 3.4 ([2]). *Пусть Δ — чистый шеллинговый симплициальный комплекс. Если каждая его грань коразмерности 1 принадлежит максимум двум гиперграням, то Δ гомеоморфен шару или сфере. Граница Δ состоит в точности из тех граней коразмерности 1, которые принадлежат ровно одной гиперграни.*

Если $Q = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, обозначим слово $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_m)$ через $Q \setminus \sigma_i$.

Основному результату предпошлём две несложные технические леммы.

Лемма 3.5. *Пусть T и S — такие слова в Π, что $\widetilde{\delta}(S) = S$, $|S| = |T| - 1$ и T содержит S как подслово. Тогда существует не более двух таких $\sigma \in T$, что слово $T \setminus \sigma$ совпадает с S. Таких элементов σ два, если $\widetilde{\delta}(T) = S$, и один иначе.*

Лемма 3.6. *Пусть P и S — слова в Π, $\widetilde{\delta}(S) = S$. Если $\widetilde{\delta}(P) = S$ и T — подслово в P, содержащее S, то $\widetilde{\delta}(T) = S$. Если же P содержит S как подслово, и $\widetilde{\delta}(P) \neq S$, то можно найти в P такое подслово T, содержащее S, что $|T| = |S| + 1$ и $\widetilde{\delta}(T) \neq S$.*

Теорема 3.7. *Пусть Q и S — слова в Π, $\widetilde{\delta}(S) = S$. Тогда слайд-комплекс $\widetilde{\Delta}(Q,S)$ гомеоморфен сфере при $\widetilde{\delta}(Q) = S$ и шару в противном случае. Грань $Q \setminus P$ лежит на границе этого комплекса тогда и только тогда, когда $\widetilde{\delta}(P) \neq S$.*

Доказательство. Комплекс $\widetilde{\Delta}(Q,S)$ чистый и шеллинговый (теорема 3.2). Из леммы 3.5 следует, что всякая грань слайд-комплекса коразмерности 1 принадлежат максимум двум гиперграням. Тогда по лемме 3.2 комплекс $\widetilde{\Delta}(Q,S)$ — шар или сфера.

Согласно лемме 3.4, граница слайд-комплекса состоит ровно из тех граней $Q \setminus T$ коразмерности 1, для которых $\widetilde{\delta}(T) \neq S$. Из леммы 3.6 заключаем, что грань $Q \setminus P$ принадлежит граничной грани коразмерности 1 (а следовательно, сама является граничной) тогда и только тогда, когда $\widetilde{\delta}(P) \neq S$. Из этой же леммы следует, что граничных граней не существует (и слайд-комплекс является сферой) в точности при $\widetilde{\delta}(Q) = S$. $\square$

Замечание 3.8. Если $\widetilde{\delta}(S) \neq S$, слайд-комплекс может не быть шаром. К примеру, при $Q = s_1 s_1 s_1 s_1$ и $S = s_1 s_1$ комплекс $\widetilde{\Delta}(Q,S)$ является двумерным остовом тетраэдра.

Список литературы

[**1**] S. Assaf and D. Searles. *Adv. Math.*, 306:89–122, 2017. [**2**] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. M. Ziegler. *Oriented Matroids.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2nd edition, 1999. [**3**] A. Knutson and E. Miller. *Adv. Math.*, 184(1):161–176, 2004. [**4**] A. Knutson and E. Miller. *Ann. of Math. (2)*, 161(3):1245–1318, 2005. [**5**] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 294(13):447–450, 1982. [**6**] E. Smirnov and A. Tutubalina. arXiv:2006.16995, 15 p., 2020.

Е. Ю. Смирнов (E. Yu. Smirnov)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Независимый Московский Университет

E-mail: esmirnov@hse.ru

А. А. Тутубалина (A. A. Tutubalina)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

E-mail: anna.tutubalina@gmail.com