Е. Ю. Смирнов, А. А. Тутубалина, Слайд-многочлены и комплексы подслов, *Матем. сб.*, 2021, том 212, номер 10, 131–151

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9477

УДК 512.714

Е. Ю. Смирнов, А. А. Тутубалина

Слайд-многочлены и комплексы подслов

Комплексы подслов были определены А. Кнутсоном и Э. Миллером в 2004 г. для описания грёбнеровских вырождений матричных многообразий Шуберта. Комплексы подслов специального типа называются комплексами rc-графов. Гиперграни такого комплекса индексируются диаграммами, называемыми rc-графами, или, что то же самое, мономами в соответствующем многочлене Шуберта. В 2017 г. С. Ассаф и Д. Сирлз определили базис, состоящий из слайд-многочленов, являющихся обобщением симметрических функций Стенли. Существует комбинаторное правило, позволяющее раскладывать многочлены Шуберта по этому базису. Мы описываем разложение комплексов подслов на страты, называемые слайд-комплексами, и показываем, что слайд-комплексы гомеоморфны дискам или сферам. В комплексах rc-графов эти страты соответствуют слайд-многочленам.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: многообразия флагов, многочлены Шуберта, многочлены Гротендика, симплициальные комплексы.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9477

§ 1. Введение

1.1. Многочлены Шуберта и rc-графы. Многочлены Шуберта $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ были определены И. Н. Бернштейном, И. М. Гельфандом и С. И. Гельфандом в [3], а также А. Ласку и М.-П. Шютценберже в [11]. Их можно рассматривать как "хорошие" полиномиальные представители классов многообразий Шуберта $[X_w] \in H^*(G/B)$, где $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ – полная линейная группа, B – борелевская подгруппа в G, а G/B – многообразие полных флагов. Хорошо известно, что их коэффициенты неотрицательны, и существует явное комбинаторное правило для вычисления этих коэффициентов.

Также можно описывать K-теорию $K_0(G/B)$ многообразия флагов G/B. Вместо классов Шуберта $[X_w] \in H^*(G/B)$ при этом рассматриваются классы структурных пучков многообразий Шуберта $[\mathcal{O}_w] \in K_0(G/B)$ в K-группе многообразия флагов. Эти классы также имеют хорошее представление в виде полиномов: это так называемые многочлены Гротендика $\mathfrak{G}_w^{(\beta)} \in \mathbb{Z}[\beta, x_1, x_2, \dots]$,

Исследование Е. Ю. Смирнова выполнено при поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (грант "Junior Leader"), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00091-а), а также фонда Simons Foundation (Simons–IUM Fellowship). Исследование А. А. Тутубалиной выполнено при поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ, а также Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (грант "Junior Leader").

зависящие еще и от дополнительного параметра β. Их коэффициенты также неотрицательны, но, в отличие от многочленов Шуберта, они не являются однородными в привычном смысле этого слова; они становятся однородными, если положить $\deg\beta = -1$. Можно рассматривать их как неоднородные деформации многочленов Шуберта $\mathfrak{S}_w$: вычисляя $\mathfrak{G}_w^{(\beta)}$ при $\beta = 0$, мы получаем соответствующий многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w = \mathfrak{G}_w^{(0)}$.

Многочлены Шуберта и Гротендика можно описать комбинаторно в терминах диаграмм, называемых rc-*графами* (по-английски *pipe dreams*). Эти диаграммы являются конфигурациями псевдолиний, ассоциированных с перестановкой; также каждой такой диаграмме можно сопоставить моном. RC-граф называется *приведенным*, если любые две псевдолинии пересекаются не более одного раза. Многочлен Шуберта (соответственно Гротендика) для перестановки w можно получить как сумму мономов по всем приведенным (соответственно не обязательно приведенным) rc-графам, отвечающим перестановке w. Этот результат, принадлежащий С. Билли и Н. Бержерону (см. [2]), а также С. В. Фомину и А. Н. Кириллову (см. [7]), является аналогом полученного Дж. Литтлвудом представления многочленов Шура в виде суммы мономов по таблицам Юнга. В частности, из него следует положительность коэффициентов многочленов Шуберта и Гротендика. Определения, связанные с rc-графами, приведены в п. 2.3.

В [9] А. Кнутсон и Э. Миллер приводят геометрическую интерпретацию rc-графов для перестановки w: последние соответствуют неприводимым компонентам в “глубоком” грёбнеровском вырождении соответствующего матричного многообразия Шуберта $\overline{X_w}$ в объединение аффинных подпространств. Комбинаторная структура этого вырождения описывается специальным симплициальным комплексом, который мы будем называть *комплексом* rc-*графов* для перестановки w. Из этого можно вывести, что мультистепень многообразия Шуберта $\overline{X_w}$ относительно максимального тора $T \subset B \subset G$ совпадает с многочленом Шуберта $\mathfrak{S}_w$.

В следующей своей статье [8] те же авторы обобщают понятие комплекса rc-графов, определяя комплексы подслов для произвольных групп Кокстера, и показывают, что такие комплексы являются расшелушиваемыми и, более того, они гомеоморфны дискам или, в редких случаях, сферам. Из этого следует множество интересных результатов, касающихся геометрии соответствующих многообразий Шуберта, как матричных, так и классических, включая новые доказательства нормальности и коэн-маколеевости многообразий Шуберта в многообразии полных флагов.

1.2. Слайд- и глайд-многочлены. Недавно С. Ассаф и Д. Сирлз в [1] определили *слайд-многочлены* $\mathfrak{F}_Q$. Это еще одно семейство многочленов, схожих с многочленами Шуберта: они образуют базис в кольце многочленов от счетного числа переменных, а их коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона являются положительными. Они индексируются rc-графами Q, удовлетворяющими дополнительному комбинаторному условию; они называются квазиямануичевыми rc-графами. Это условие соответствует условию Ямаучи для косых таблиц Юнга; точные определения даны в п. 2.4.

Более того, существует комбинаторная формула, позволяющая раскладывать многочлены Шуберта по слайд-базису: каждый многочлен Шура является линейной комбинацией слайд-многочленов с коэффициентами 0 и 1.

Слайд-многочлены также имеют K-теоретический аналог: глайд-многочлены $\mathcal{G}_Q^{(\beta)}$, определенные О. Печеником и Д. Сирлзом в [14] (отметим, что фамилии Schubert и Grothendieck, равно как и слова “slide” и “glide”, начинаются с букв S и G). Существуют аналогичные представления многочленов Гротендика в виде сумм глайд-многочленов.

1.3. Слайд-комплексы. В настоящей статье определены соответствующие слайд-многочленам аналоги комплексов подслов, названные слайд-комплексами. Каждый комплекс подслов разбивается в объединение слайд-комплексов. Мы показываем, что слайд-комплексы являются расшелушиваемыми (теорема 5). Нашим основным результатом является теорема 6, утверждающая, что каждый слайд-комплекс, появляющийся как страта в комплексе подслов, гомеоморфен диску или сфере.

В случае комплексов rc-графов по слайд-комплексу можно получить соответствующий слайд- (соответственно глайд-) многочлен, просуммировав мономы по всем гиперграням (соответственно всем внутренним граням) комплекса. Это дает топологическую интерпретацию для комбинаторного представления многочлена $\mathfrak{S}_w$ в виде суммы $\mathfrak{F}_Q$ и многочлена $\mathfrak{G}_w^{(\beta)}$ в виде суммы $\mathcal{G}_Q^{(\beta)}$ (следствия 4 и 5).

1.4. Возможная связь с вырождением матричных многообразий Шуберта. В настоящей статье мы имеем дело только с комбинаторными конструкциями и не касаемся геометрических аспектов данной теории. Но было бы интересно изучить связь слайд-многочленов с вырождениями матричных многообразий Шуберта. Скажем, естественным образом возникает вопрос, существует ли “промежуточное вырождение” матричного многообразия Шуберта $\overline{X_w} \to \bigcup \overline{Y_{w,Q}}$, неприводимые компоненты $\overline{Y_{w,Q}}$ которого индексируются квазиямануичиевыми rc-графами, а их мультистепени равняются слайд-многочленам $\mathfrak{F}_Q$? Такое вырождение дало бы геометрическую интерпретацию коэффициентов Литтлвуда–Ричардсона для слайд-многочленов, описанных С. Ассаф и Д. Сирлзом в [1].

1.5. Структура статьи. В § 2 приведены определения многочленов Шуберта и Гротендика и их комбинаторное описание с помощью rc-графов, а также приведены определения слайд- и глайд-многочленов. В § 3 содержится определение комплекса подслов для произвольной системы Коксетера и напоминается доказательство того факта, что комплексы подслов являются расшелушиваемыми и гомеоморфны дискам или сферам. Также там подробно разбираются комплексы rc-графов, являющиеся наиболее интересным частным случаем комплексов подслов. Основные результаты этой статьи содержатся в § 4: в п. 4.1 определяется разбиение комплекса подслов на страты, называемые слайд-комплексами, и доказывается, что эти страты являются расшелушиваемыми и гомеоморфными дискам или сферам. В п. 4.2 показывается, что разбиение комплекса rc-графов на слайд-комплексы согласуется с представлением соответствующего многочлена Шуберта (соответственно Гротендика) в виде суммы слайд- (соответственно глайд-) многочленов. Последний п. 4.3 описывает связь слайд-комплексов с графами флипов, рассматриваемыми в работе [13].

§ 2. Многочлены Шуберта и Гротендика, слайд- и глайд-многочлены

2.1. Симметрическая группа. Через $\mathbf{S}_n$ обозначим симметрическую группу порядка n, т.е. группу биективных отображений множества $\{1,\dots,n\}$ в себя. Она порождена простыми транспозициями $s_i = (i \leftrightarrow i+1)$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$, связанными соотношениями Кокстера:

– $s_i^2 = \mathrm{Id}$;
– $s_i s_j = s_j s_i$ при $|i-j| \geqslant 2$ (далекая коммутативность);
– $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ для всех $i = 1,\dots,n-2$ (соотношение кос).

Мы будем использовать однострочную запись для перестановок: например, $w = \overline{1423}$ переводит 1 в 1, 2 в 4, 3 в 2 и 4 в 3.

Каждая перестановка $w \in \mathbf{S}_n$ представима в виде произведения $w = s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ простых транспозиций. Будем говорить, что последовательность $(s_{i_1},\dots,s_{i_k})$ является *словом* для перестановки w. Минимальную длину слова для перестановки w назовем *длиной* w и обозначим через $\ell(w)$. Слово для w называется *приведенным*, если его длина равна $\ell(w)$. Хорошо известно, что длина $\ell(w)$ равна количеству инверсий в перестановке w, т.е. числу

$$\ell(w) = \#\{(i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n,\ w(i) > w(j)\}.$$

Будем обозначать через w_0 самую длинную перестановку из $\mathbf{S}_n$. Эта перестановка переводит i в $n+1-i$ для каждого i; ясно, что $\ell(w_0) = C_n^2 = n(n-1)/2$.

Существует множество приведенных слов для w_0; одно из них понадобится нам в дальнейшем:

$$w_0 = (s_{n-1}\cdots s_3 s_2 s_1)(s_{n-1}\cdots s_3 s_2)(s_{n-1}\cdots s_3)\cdots(s_{n-1}s_{n-2})(s_{n-1}).$$

2.2. Многочлены Шуберта и Гротендика. Обозначим последовательность переменных $x_1,\dots,x_n$ через $\mathbf{x}$ и рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$. Группа $\mathbf{S}_n$ действует на этом кольце перестановкой переменных:

$$w \circ f(x_1,\dots,x_n) = f(x_{w(1)},\dots,x_{w(n)}).$$

Определение 1. Для $i = 1,\dots,n-1$ определим *операторы разделенных разностей* $\partial_i\colon \mathbb{Z}[\mathbf{x}] \to \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ следующим образом:

$$\partial_i f(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}) - s_i \circ f(\mathbf{x})}{x_i - x_{i+1}}.$$

Поскольку числитель этой дроби кососимметричен по переменным x_i и x_{i+1}, он делится на знаменатель, и частное является многочленом с целыми коэффициентами.

Операторы разделенных разностей удовлетворяют соотношениям Кокстера:

– $\partial_i^2 = 0$,
– $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ если $|i-j| \geqslant 2$,
– $\partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}$ для всех $i = 1,\dots,n-2$.

Определение 2. *Многочленами Шуберта* называются однородные многочлены $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, занумерованные перестановками $w \in \mathbf{S}_n$ и удовлетворяющие соотношениям

$$\mathfrak{S}_{id} = 1,$$
$$\partial_i \mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i}, & \ell(ws_i) < \ell(w), \\ 0, & \ell(ws_i) > \ell(w), \end{cases}$$

для всех $i = 1, \ldots, n-1$.

А. Ласку и М.-П. Шютценберже [11] показали, что многочлены Шуберта определены этими соотношениями однозначно. Можно также определить их при помощи рекуррентного соотношения

$$\mathfrak{S}_{ws_i}(\mathbf{x}) = \partial_i \mathfrak{S}_w(\mathbf{x}), \text{ если } \ell(ws_i) < \ell(w),$$

с начальным условием

$$\mathfrak{S}_{w_0}(\mathbf{x}) = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-2}^2 x_{n-1}.$$

Можно переписать это соотношение следующим образом: если $s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ является приведенным словом для перестановки $w_0 w$, то

$$\mathfrak{S}_w = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} \mathfrak{S}_{w_0}.$$

Поскольку разделенные разности удовлетворяют соотношениям далекого коммутирования и кос, а любое приведенное слово для $w_0 w$ можно превратить в любое другое при помощи только этих соотношений, то такое определение многочленов Шуберта корректно (т.е. не зависит от выбора приведенного слова).

Многочлены Гротендика были определены А. Ласку в [10]. Мы будем использовать их деформации, β-многочлены Гротендика, введенные С. В. Фоминым и А. Н. Кирилловым в [6]. Иногда мы будем называть их просто многочленами Гротендика. Они определяются так же, как многочлены Шуберта, но вместо ∂_i мы будем использовать *операторы изобарических разделенных разностей* $\pi_i^{(\beta)}$.

Определение 3. Пусть β – формальный параметр. Для $i = 1, \ldots, n-1$ определим *β-изобарические операторы разделенных разностей* $\pi_i^{(\beta)} \colon \mathbb{Z}[\beta, \mathbf{x}] \to \mathbb{Z}[\beta, \mathbf{x}]$:

$$\pi_i^{(\beta)} f(\mathbf{x}) = \frac{(1 + \beta x_{i+1}) f(\mathbf{x}) - (1 + \beta x_i) s_i \circ f(\mathbf{x})}{x_i - x_{i+1}}.$$

Так же, как обычные операторы разделенных разностей, их изобарические аналоги удовлетворяют соотношениям Кокстера:

– $\pi_i^{(\beta)} \pi_j^{(\beta)} = \pi_j^{(\beta)} \pi_i^{(\beta)}$, если $|i-j| \geqslant 2$,
– $\pi_i^{(\beta)} \pi_{i+1}^{(\beta)} \pi_i^{(\beta)} = \pi_{i+1}^{(\beta)} \pi_i^{(\beta)} \pi_{i+1}^{(\beta)}$ для всех $i = 1, \ldots, n-2$.

Определение 4. Определим *β-многочлены Гротендика* $\mathfrak{G}_w^{(\beta)}$ при помощи начального условия

$$\mathfrak{G}_{w_0}^{(\beta)}(\mathbf{x}) = x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-2}^2x_{n-1}$$

и рекуррентного соотношения

$$\mathfrak{G}_w^{(\beta)} = \pi_{i_1}^{(\beta)}\cdots\pi_{i_k}^{(\beta)}\mathfrak{G}_{w_0}^{(\beta)},$$

где $s_{i_k}\cdots s_{i_1}$ является приведенным словом для перестановки w_0w.

Поскольку операторы $\pi_i^{(\beta)}$ удовлетворяют соотношениям Кокстера, эти многочлены также определены корректно. Можно видеть, что $\pi_i^{(0)} = \partial_i$ и $\mathfrak{G}_{w_0}^{(\beta)} = \mathfrak{S}_{w_0}$, и, значит, $\mathfrak{G}_w^{(0)} = \mathfrak{S}_w$ для всех $w \in \mathbf{S}_n$. Таким образом, подставив $\beta = 0$ в $\mathfrak{G}^{(\beta)}$, можно получить многочлены Шуберта.

2.3. RC**-графы.** Этот пункт посвящен rc-графам: основному комбинаторному инструменту для работы с многочленами Шуберта и Гротендика.

Определение 5. Рассмотрим квадрат $n \times n$ и заполним его элементами двух типов: "крестами" и "коленями" таким образом, чтобы все кресты лежали строго выше антидиагонали. Колени, лежащие ниже диагонали, в этой работе рисоваться не будут. Такой объект называется rc-*графом*[1].

RC-граф можно рассматривать как систему псевдолиний, или *труб*, ведущих от левой стороны квадрата к верхней. Пронумеруем входы и выходы этих труб числами от 1 до n сверху вниз и слева направо.

RC-граф называется *приведенным*, если никакие две трубы в нем не пересекаются дважды.

На рис. 1 приведены примеры приведенного и неприведенного rc-графов.

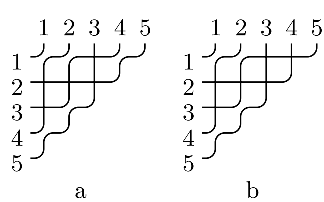


Рис. 1. Приведенный (a) и неприведенный (b) rc-графы.

Определение 6. Можно воспринимать rc-граф как биекцию из множества начальных (левых) точек труб в множество их конечных (верхних) точек. Это представление сопоставляет каждому *приведенному* rc-графу P перестановку

[1] Термин "rc-граф", предложенный, по-видимому, С. Билли и Н. Бержероном, происходит от слов "reduced compatible". По-английски эти диаграммы более часто называют pipe dreams: этот термин, предложенный А. Кнутсоном, отсылает к популярной в 1990-х гг. видеоигре, в которой игрок строил водопровод из предлагаемых деталей. Этим объясняется "водопроводная" терминология: труба, колено и проч.

$w(P) \in \mathbf{S}_n$, называемую *формой* P. Также будем ассоциировать с каждым rc-графом P множество D_P координат его крестов (первая координата – номер строки, вторая – номер столбца).

Например, форма rc-графа P на рис. 1, (a) равна $w(P) = \overline{15423}$, а множество D_P для него выглядит как $D_P = \{(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$.

Определение 7. Операция *приведения* reduct действует на rc-графах следующим образом: строчки перебираются сверху вниз и каждая строка читается справа налево. Если в какой-то клетке пересекаются две трубы, которые уже пересекались до этого, то крест в этой клетке заменяется на колено (рис. 2).

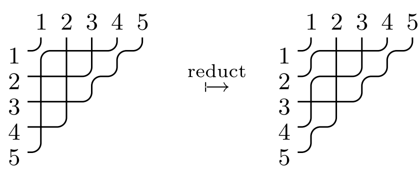


Рис. 2. Действие операции reduct на неприведенный rc-граф.

Очевидно, rc-граф reduct(P) является приведенным для любого P, и данная операция действует тождественно на приведенных rc-графах: reduct$(P) = P$. *Формой* неприведенного rc-графа P будем называть форму $w(\mathrm{reduct}(P))$ его приведения.

Множество всех rc-графов данной формы $w \in \mathbf{S}_n$ обозначим через $\mathrm{PD}(w)$, а подмножество приведенных rc-графов данной формы – через $\mathrm{PD}_0(w) \subset \mathrm{PD}(w)$.

Следующая теорема была доказана С. Билли и Н. Бержероном и независимо от них С. В. Фоминым и А. Н. Кирилловым.

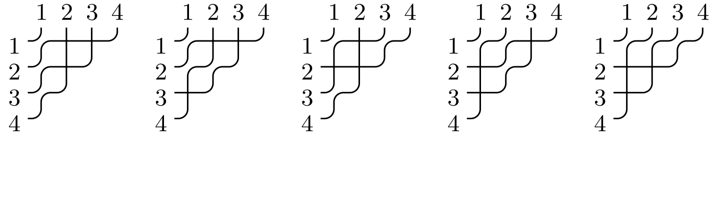
Теорема 1 (см. [2], [7]). *Многочлены Шуберта удовлетворяют равенству*

$$\mathfrak{S}_w = \sum_{P \in \mathrm{PD}_0(w)} \mathbf{x}^P,$$

где

$$\mathbf{x}^P := \prod_{(i,j) \in D_P} x_i.$$

Пример 1. Рассмотрим перестановку $w = \overline{1432}$. Существует пять приведенных rc-графов формы w:



Поэтому многочлен Шуберта для перестановки w имеет вид

$$\mathfrak{S}_{\overline{1432}}(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3.$$

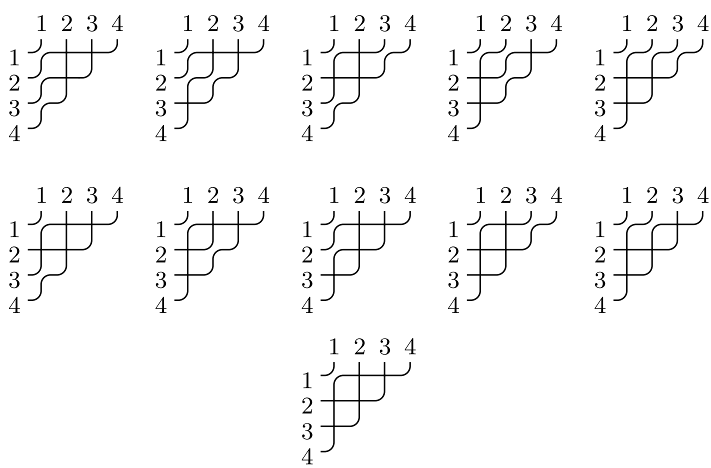
Существует аналог этой теоремы для многочленов Гротендика.

Определение 8. Обозначим через $\mathrm{ex}(P)$ *избыток* P, т.е. число "лишних" крестов в (неприведенном) rc-графе P. А именно, $\mathrm{ex}(P) = \#(D_P \setminus D_{\mathrm{reduct}(P)})$.

Теорема 2 (см. [6]). *Многочлены Гротендика удовлетворяют следующему равенству*:

$$\mathfrak{G}_w^{(\beta)} = \sum_{P\in \mathrm{PD}(w)} \beta^{\mathrm{ex}(P)}\mathbf{x}^P.$$

Пример 2. Продолжая пример 1, вычислим многочлен Гротендика для $w = \overline{1432}$. Множество $\mathrm{PD}(w)$ состоит из 11 rc-графов, пять из которых являются приведенными, а шесть – неприведенными:

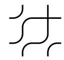
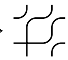
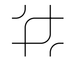
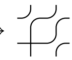


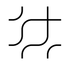
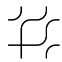
Соответствующий многочлен Гротендика равен

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{(1432)}^{(\beta)} = {} & x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 \\ & + \beta x_1^2x_2^2 + 2\beta x_1^2x_2x_3 + 2\beta x_1x_2^2x_3 + \beta^2x_1^2x_2^2x_3.\end{aligned}$$

Поскольку $\mathrm{ex}(P) = 0$, если и только если rc-граф P приведенный, то $\mathfrak{G}_w^{(\beta)} = \mathfrak{S}_w + \beta(\dots)$. Из этого следует равенство $\mathfrak{G}_w^{(0)} = \mathfrak{S}_w$, упоминавшееся ранее.

2.4. Слайд- и глайд-многочлены. С. Ассаф и Д. Сирлз [1] определили другой базис в кольце многочленов: *слайд-многочлены*. Одно из их основных свойств заключается в том, что любой многочлен Шуберта можно представить в виде суммы слайд-многочленов с коэффициентами 0 и 1. В последующей статье О. Печеника и Д. Сирлза [14] приводится аналогичная конструкция для многочленов Гротендика. Напомним эти конструкции.

Определение 9. Пусть P – rc-граф (возможно, неприведенный). Определим *слайд-движение* S_i следующим образом. Допустим, что в P все кресты в ряду i расположены строго правее всех крестов в ряду $i+1$ (в частности, ряд $i+1$ может быть пустым). Тогда можно передвинуть самый левый крестик в ряду i вниз-влево на одну клетку:  $\mapsto$ . В случае, если исходный rc-граф был неприведенным, то это движение может выглядеть так:  $\mapsto$ . Если же самый левый крест в ряду i находится либо в первом столбце, либо нестрого левее какого-то креста в ряду $i+1$, то движение S_i действует тождественно.

Заметим, что слайд-движение сохраняет форму rc-графа. Действительно, $\mathrm{reduct}(S_i(P))$ и $\mathrm{reduct}(P)$ либо совпадают, либо получаются друг из друга сохраняющим форму сдвигом одного крестика:  $\mapsto$ . Кроме того, слайд-движение сохраняет количество крестов в приведенном rc-графе, а значит, переводит приведенные rc-графы в приведенные.

Определение 10. Если все слайд-движения действуют на rc-граф P тождественно (иными словами, для всех i верно, что в i-й строке P самый левый крестик лежит либо в первом столбце, либо нестрого левее какого-то крестика из $(i+1)$-й строки), то такой rc-граф называется *квазияманучиевым* (quasi-Yamanouchi).

Обозначим множество всех квазияманучиевых rc-графов формы w через $\mathrm{QPD}(w) \subset \mathrm{PD}(w)$, а подмножество всех приведенных квазияманучиевых rc-графов через $\mathrm{QPD}_0(w) = \mathrm{PD}_0(w) \cap \mathrm{QPD}(w)$.

Определение 11. Операции *дестандартизации* $\mathrm{dst}\colon \mathrm{PD}(w) \to \mathrm{QPD}(w)$ и $\mathrm{dst}_0\colon \mathrm{PD}_0(w) \to \mathrm{QPD}_0(w)$ определяются как последовательное применение к rc-графу слайд-движений до тех пор, пока он не станет квазияманучиевым.

В [1; лемма 3.12] показано, что каждый rc-граф можно сделать квазияманучиевым, применяя к нему слайд-движения, и получившийся квазияманучиев rc-граф не зависит от последовательности слайд-движений, а значит, определен корректно. Операции $\mathrm{dst}\colon \mathrm{PD}(w) \to \mathrm{QPD}(w)$ и $\mathrm{dst}_0\colon \mathrm{PD}_0(w) \to \mathrm{QPD}_0(w)$ являются проекторами на множества квазияманучиевых rc-графов и приведенных квазияманучиевых rc-графов соответственно и, следовательно, сюръективны.

Определение 12. Пусть $Q \in \mathrm{QPD}_0(w)$ – приведенный квазияманучиев rc-граф. Множество $\mathrm{dst}_0^{-1}(Q)$ называется *слайд-орбитой* rc-графа Q. Если $Q \in \mathrm{QPD}(w)$ – не обязательно приведенный квазияманучиев rc-граф, то $\mathrm{dst}^{-1}(Q)$ называется *глайд-орбитой* Q.

Определение 13. Если $Q \in \mathrm{QPD}_0(w)$, то *слайд-многочлен* $\mathfrak{F}_Q$ определяется как сумма мономов, отвечающих rc-графам из соответствующей слайд-орбиты:

$$\mathfrak{F}_Q = \sum_{P \in \mathrm{dst}_0^{-1}(Q)} \mathbf{x}^P.$$

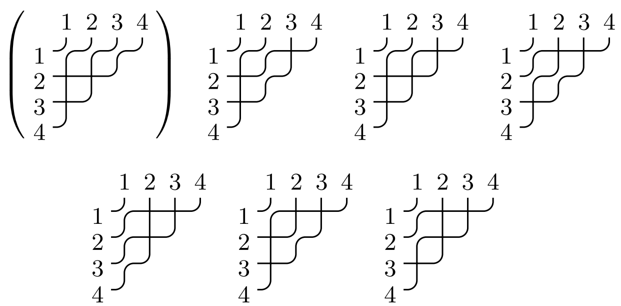
Если $Q \in \mathrm{QPD}(w)$, то *глайд-многочлен* $\mathcal{G}_Q^{(\beta)}$ определяется как сумма мономов, отвечающих rc-графам из соответствующей глайд-орбиты:

$$\mathcal{G}_Q^{(\beta)} = \sum_{P \in \mathrm{dst}^{-1}(Q)} \beta^{\mathrm{ex}(P)-\mathrm{ex}(Q)} \mathbf{x}^P.$$

Из этого определения и теорем 1 и 2 следует, что

$$\mathfrak{S}_w = \sum_{Q \in \mathrm{QPD}_0(w)} \mathfrak{F}_Q, \qquad \mathfrak{G}_w^{(\beta)} = \sum_{Q \in \mathrm{QPD}(w)} \beta^{\mathrm{ex}(Q)} \mathcal{G}_Q^{(\beta)}.$$

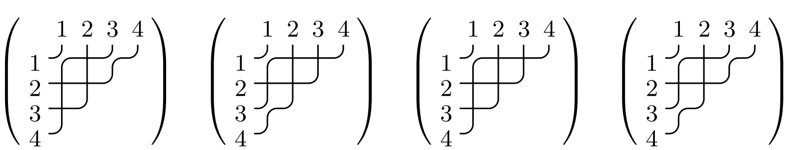
Пример 3. Существует пять квазияманучиевых rc-графов формы $w = \overline{1432}$, и, соответственно, $\mathrm{PD}(w)$ подразбивается на пять глайд-орбит. В одной из них семь rc-графов (квазияманучиев rc-граф среди них выделен скобками):



Следовательно, соответствующий глайд-многочлен равен

$$\mathcal{G}^{(\beta)}_{s_3s_2s_3} = 2\beta x_1^2x_2x_3 + \beta x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3.$$

Каждая из четырех оставшихся глайд-орбит содержит по одному rc-графу:



Поэтому соответствующие глайд-многочлены являются мономами:

$$\mathcal{G}^{(\beta)}_{s_2s_3s_2s_3} = x_1x_2^2x_3, \qquad \mathcal{G}^{(\beta)}_{s_3s_2s_3s_2} = x_1^2x_2^2,$$
$$\mathcal{G}^{(\beta)}_{s_3s_2s_3s_2s_3} = x_1^2x_2^2x_3, \qquad \mathcal{G}^{(\beta)}_{s_2s_3s_2} = x_1x_2^2.$$

§ 3. Комплексы подслов и комплексы rc-графов

3.1. Комплексы подслов. Рассмотрим произвольную систему Кокстера (Π, Σ), где Π – группа Кокстера, минимально порожденная набором простых отражений Σ. Основным примером по-прежнему будет симметрическая группа $\Pi = \mathbf{S}_n$, порожденная набором простых транспозиций $\Sigma = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$.

Определение 14. *Словом* длины m будем называть последовательность $\mathcal{Q} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ простых отражений. *Подсловом* слова $\mathcal{Q}$ называется подпоследовательность $\mathcal{P} = (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k})$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m$.

Будем говорить, что $\mathcal{P}$ *представляет* $\pi \in \Pi$, если $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$ является приведенным словом для элемента π. Если какое-то подслово слова $\mathcal{P}$ представляет элемент π, то будем говорить, что $\mathcal{P}$ *содержит* π.

Комплекс подслов $\Delta(\mathcal{Q}, \pi)$ – это множество непустых слов $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$, дополнения $\mathcal{P}$ к которым содержат π. Это симплициальный комплекс; одна его грань лежит на границе другой тогда и только тогда, когда первое из соответствующих подслов является подмножеством второго.

Все приведенные слова для $\pi \in \Pi$ имеют одинаковую длину, и, следовательно, комплекс $\Delta(\mathcal{Q}, \pi)$ является чистым комплексом размерности $m - \ell(\pi)$. Те подслова $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$, для которых $\mathcal{P}$ представляет π, являются его гипергранями.

Замечание 1. Чтобы различать слова в произвольных системах Кокстера и rc-графы, мы используем каллиграфический шрифт $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ для слов и стандартный шрифт P, Q для rc-графов.

Пример 4. Пусть $\Pi = \mathbf{S}_4$, $\pi = \overline{1432}$, $Q = s_3s_2s_1s_3s_2s_3$. Для этой перестановки есть два приведенных слова: $\pi = s_2s_3s_2 = s_3s_2s_3$. Обозначим центр пятиугольника через s_1, а вершины пронумеруем транспозициями s_3, s_2, s_3, s_2, s_3 по кругу. Тогда гипергранями комплекса $\Delta(Q, \pi)$ будут являться треугольники, образованные двумя соседними вершинами пятиугольника и его центром (рис. 3).

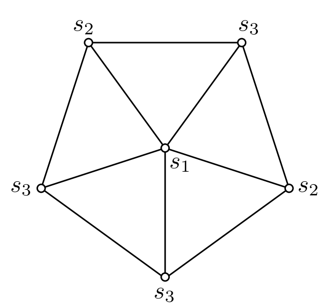


Рис. 3. Комплекс подслов $\Delta(s_3s_2s_1s_3s_2s_3, s_2s_3s_2)$.

Определение 15. Пусть Δ – симплициальный комплекс, а $F \in \Delta$ – его грань. Результатом *удаления* F из Δ является комплекс

$$\operatorname{del}(F, \Delta) = \{G \in \Delta \mid G \cap F = \varnothing\}.$$

Линк F в Δ – это комплекс

$$\operatorname{link}(F, \Delta) = \{G \in \Delta \mid G \cap F = \varnothing,\ G \cup F \in \Delta\}.$$

Определение 16. Комплекс Δ размерности n называется *вершинно-разложимым*, если он чистый и удовлетворяет одному из двух следующих условий:

– Δ является симплексом размерности n; или

– для какой-то вершины $v \in \Delta$ комплекс $\mathrm{del}(v, \Delta)$ является вершинно-разложимым размерности n, а комплекс $\mathrm{link}(v, \Delta)$ – вершинно-разложимым размерности $(n-1)$.

Определение 17. *Расшелушиванием* (shelling; по-русски также встречается термин *шеллинг*) симплициального комплекса Δ называется полный порядок на множестве его гиперграней $F_1, F_2, \ldots, F_t$, удовлетворяющий следующему условию: для любых i, j, для которых $1 \leqslant i < j \leqslant t$, существует такой k и такая вершина $v \in F_j$, что $1 \leqslant k < j$ и $F_i \cap F_j \subseteq F_k \cap F_j = F_j \setminus \{v\}$.

Комплекс, обладающий расшелушиванием, называется *расшелушиваемым.*

Определение расшелушивания можно перефразировать следующим образом: для любого j, для которого $2 \leqslant j \leqslant t$, комплекс $(\bigcup_{i<j} F_i) \cap F_j$ является чистым размерности $\dim F_j - 1$.

Определение вершинной разложимости было впервые дано в работе [4]; в той же статье показано, что из вершинной разложимости комплекса следует его расшелушиваемость.

Предложение 1 (см. [4]). *Вершинно-разложимые комплексы являются расшелушиваемыми.*

Следующее утверждение доказывается в работе [8; теорема 2.5].

Теорема 3. *Комплексы подслов являются вершинно-разложимыми и, следовательно, расшелушиваемыми.*

Определение 18. *Произведение Демазюра* $\delta(\mathcal{Q}) \in \Pi$ для слова $\mathcal{Q}$ определяется индуктивно: $\delta(\sigma) = \sigma$ для $\sigma \in \Sigma$, и

$$\delta(\mathcal{Q}, \sigma) = \begin{cases} \delta(\mathcal{Q})\sigma, & \ell(\delta(\mathcal{Q})\sigma) > \ell(\delta(\mathcal{Q})), \\ \delta(\mathcal{Q}) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Другими словами, мы перемножаем элементы $\mathcal{Q}$ слева направо, пропуская те из них, умножение на которые уменьшает длину произведения. Также можно думать о произведении Демазюра как о произведении в моноиде, порожденном Σ, с соотношениями Кокстера, в которых $s_i^2 = e$ заменено на $s_i^2 = s_i$, см. [8; определение 3.1].

Напомним главный результат статьи [8].

Теорема 4 (см. [8; теорема 3.7]). *Комплекс $\Delta(\mathcal{Q}, \pi)$ гомеоморфен диску или сфере. Грань $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ принадлежит границе комплекса тогда и только тогда, когда $\delta(\mathcal{P}) \neq \pi$.*

Следствие 1 (см. [8; следствие 3.8]). *Комплекс $\Delta(\mathcal{Q}, \pi)$ является сферой, если $\delta(\mathcal{Q}) = \pi$, и диском в противном случае.*

3.2. Комплексы rc-графов. RC-графы тесно связаны с комплексами подслов специального вида. Пусть $\Pi = \mathbf{S}_n$. Зафиксируем приведенное слово для самой длинной перестановки:

$$\mathcal{Q}_{0,n} = (s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_1)(s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_2)(s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_3)\cdots(s_{n-1}s_{n-2})(s_{n-1}).$$

Его можно получить, если прочитать таблицу

$$\begin{array}{cccccc}
s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n-2} & s_{n-1} \\
s_2 & s_3 & \dots & s_{n-2} & s_{n-1} & \\
s_3 & \dots & s_{n-2} & s_{n-1} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \\
s_{n-2} & s_{n-1} & & & & \\
s_{n-1} & & & & &
\end{array}$$

справа налево сверху вниз. Пусть $P \in \mathrm{PD}_0(w)$ – приведенный rc-граф формы $w \in \mathbf{S}_n$. Для каждого крестика в нем возьмем транспозицию из соответствующего места в таблице. Мы получим подслово $\mathrm{word}(P)$ в $\mathcal{Q}_{0,n}$. Несложно увидеть, что $\mathrm{word}(P)$ будет представлять перестановку w. Верно и обратное: если $\mathcal{T}$ – подслово в $\mathcal{Q}_{0,n}$, представляющее w, то rc-граф с крестиками на местах, соответствующих буквам $\mathcal{T}$, будет приведенным формы w.

Таким образом, мы получили биекцию между элементами множества $\mathrm{PD}_0(w)$ и гипергранями комплекса $\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, w)$.

Определение 19. Комплекс $\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, w)$ называется *комплексом* rc-*графов*.

Операция приведения rc-графа естественным образом связана с операцией взятия произведения Демазюра: для любого rc-графа P выполнено равенство $w(\mathrm{reduct}(P)) = \delta(\mathrm{word}(P))$. Кроме этого, если P – неприведенный rc-граф формы w, то $\mathrm{word}(P)$ содержит $\mathrm{word}(\mathrm{reduct}(P))$ в качестве подслова, а значит, содержит перестановку w.

Пользуясь этими фактами и теоремой 4, мы получаем, что существует биекция между $\mathrm{PD}(w)$ и внутренними гранями комплекса rc-графов $\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, w)$.

Следующее описание многочленов Гротендика в терминах комплексов rc-графов принадлежит А. Кнутсону и Э. Миллеру, см. [8; следствие 5.5]. Иногда, как, например, в [5], оно используется в качестве эквивалентного определения многочленов Гротендика.

Следствие 2. *Многочлен Гротендика $\mathfrak{G}_w^\beta$ можно получить как сумму мономов по внутренним граням комплекса* rc-*графов. А именно, для $w \in \mathbf{S}_n$ мы получаем*

$$\mathfrak{G}_w^{(\beta)} = \sum_{\mathcal{P} \in \mathrm{int}(\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, w))} \beta^{\mathrm{codim}(\mathcal{P})} \mathbf{x}^{\mathcal{P}}$$

(*через $\mathbf{x}^{\mathcal{P}}$ мы обозначаем моном для* rc-*графа, соответствующего грани $\mathcal{P}$*).

Пример 5. На рис. 4 изображен комплекс rc-графов для $w = \overline{1432}$. RC-графы в нем разбиты на группы в зависимости от их формы; к каждому rc-графу приписан соответствующий ему моном $\beta^{\mathrm{ex}(P)}\mathbf{x}^P$ из многочлена Гротендика.

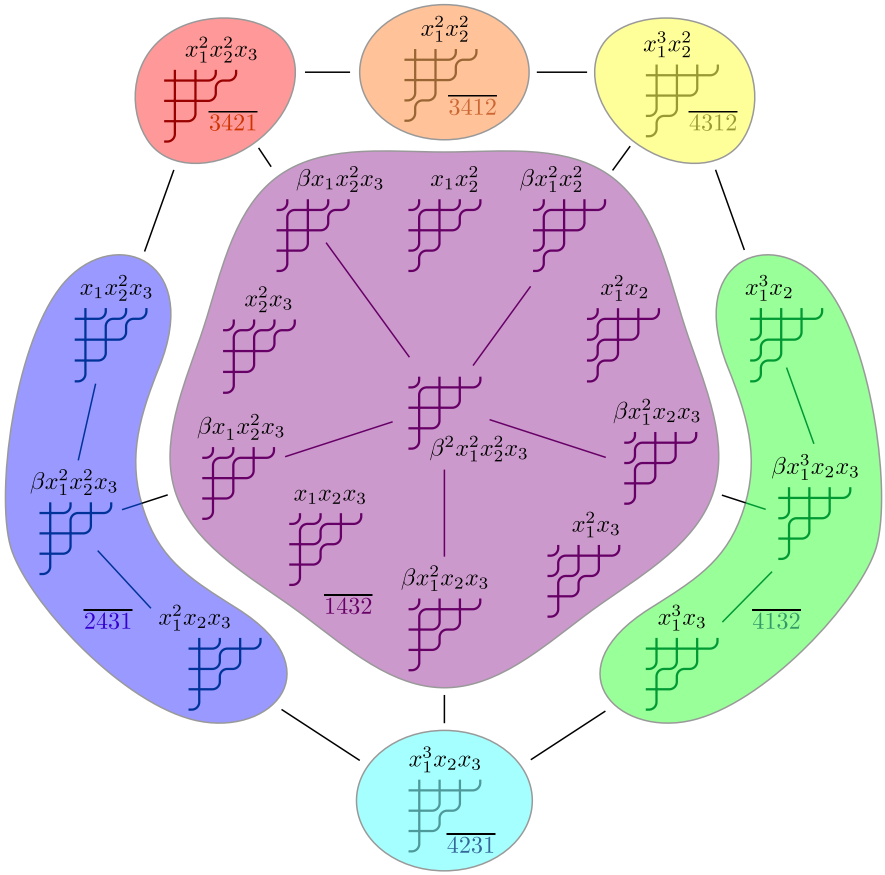


Рис. 4. Комплекс rc-графов для $w = \overline{1432}$.

Для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ введем обозначение: $\mathrm{PD}_k(w) = \{P \in \mathrm{PD}(w) \mid \mathrm{ex}(P) = k\}$.

Следствие 3. *Для каждой перестановки $w \in \mathbf{S}_n$ верно равенство*

$$\sum_{k=0}^{n(n-1)/2} (-1)^k |\,\mathrm{PD}_k(w)| = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим специализацию многочлена Гротендика в $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)$ и $\beta = -1$ и получим соотношение:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_w^{(-1)}(1,1,\ldots,1) &= \sum_{P \in \mathrm{PD}(w)} (-1)^{\mathrm{ex}(P)} = \sum_{k=0}^{n(n-1)/2} (-1)^k |\,\mathrm{PD}_k(w)| \\ &= \sum_{P \in \mathrm{int}(\Delta(\mathcal{Q}_{0,n},w))} (-1)^{\mathrm{codim}(P)} = \sum_{P \in \Delta(\mathcal{Q}_{0,n},w)} (-1)^{\mathrm{codim}(P)} \\ &\quad + \sum_{P \in \partial\Delta(\mathcal{Q}_{0,n},w)} (-1)^{\mathrm{codim}(P)} = (-1)^d \chi_{\Delta(\mathcal{Q}_{0,n},w)} + (-1)^{d-1} \chi_{\partial\Delta(\mathcal{Q}_{0,n},w)}.\end{aligned}$$

Здесь $d=n(n-1)/2-\ell(w)$ – размерность комплекса rc-графов, а χ_Δ – эйлерова характеристика комплекса Δ.

Для каждого элемента $w \neq \delta(\mathcal{Q}_{0,n}) = w_0$ соответствующий комплекс rc-графов $\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, w)$ гомеоморфен d-мерному диску, а его граница гомеоморфна $(d-1)$-мерной сфере (для $w = w_0$ соответствующий комплекс rc-графов является точкой). Поэтому

$$\chi_{\Delta(\mathcal{Q}_{0,n},w)} = 1, \qquad \chi_{\partial\Delta(\mathcal{Q}_{0,n},w)} = 1-(-1)^d,$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{G}^{(-1)}(1,1,\dots,1) = \sum_{k=0}^{n(n-1)/2} (-1)^k |\operatorname{PD}_k(w)| = (-1)^d(1-(1-(-1)^d)) = (-1)^{2d} = 1.$$

Следствие доказано.

§ 4. Слайд-комплексы

В этом параграфе описана основная конструкция статьи: разбиение комплексов подслов на страты, соответствующие слайд- (или глайд-) орбитам. Эти страты называются *слайд-комплексами*. Будет показано, что так же, как и комплексы подслов, слайд-комплексы гомеоморфны дискам или сферам.

4.1. Общие сведения о слайд-комплексах. Как раньше, пусть (Π,Σ) – система Кокстера.

Определение 20. Пусть $\mathcal{Q},\mathcal{S}$ – два слова в алфавите Σ. *Слайд-комплексом подслов* $\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q},\mathcal{S})$ назовем множество таких подслов $\mathcal{Q}\setminus\mathcal{P}$, что их дополнения $\mathcal{P}$ содержат $\mathcal{S}$ в качестве подслова. Аналогично случаю комплексов подслов, это множество обладает естественной структурой симплициального комплекса.

Следующая теорема является аналогом теоремы 3.

Теорема 5. *Слайд-комплексы являются вершинно-разложимыми и, следовательно, расшелушиваемыми.*

Доказательство. Очевидно, что все слайд-комплексы являются чистыми.

Пусть $\mathcal{Q} = (\sigma,\sigma_2,\dots,\sigma_m)$ и $\mathcal{S} = (s_{j_1}, s_{j_2},\dots,s_{j_l})$ – два слова в алфавите Σ. Пусть $\mathcal{Q}' = (\sigma_2,\dots,\sigma_m)$ и $\mathcal{S}' = (s_{j_2},\dots,s_{j_l})$. Тогда $\operatorname{link}(\sigma,\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q},\mathcal{S})) = \widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}',\mathcal{S})$. Если слово $\mathcal{S}$ начинается с буквы σ, то $\operatorname{del}(\sigma,\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q},\mathcal{S})) = \widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}',\mathcal{S}')$. В противном случае $\operatorname{del}(\sigma,\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q},\mathcal{S})) = \operatorname{link}(\sigma,\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q},\mathcal{S})) = \widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}',\mathcal{S})$.

Следовательно, для любой вершины σ результат ее удаления и ее линк в $\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q},\mathcal{S})$ являются слайд-комплексами. Осталось воспользоваться индукцией по длине слова $\mathcal{Q}$. Теорема доказана.

Введем аналог произведения Демазюра для подслов.

Определение 21. Слово $\widetilde{\delta}(\mathcal{Q})$ получается из слова $\mathcal{Q}$ заменой каждой максимальной группы подряд идущих одинаковых букв $s_i\dots s_i$ на одну букву s_i.

К примеру, $\widetilde{\delta}(s_1s_1s_2s_1s_2s_2s_2) = s_1s_2s_1s_2$.

Замечание 2. Из определения следует, что для любого слова $\mathcal{Q}$ верно, что $\widetilde{\delta}(\delta(\mathcal{Q})) = \delta(\widetilde{\delta}(\mathcal{Q})) = \delta(\mathcal{Q})$.

Следующая теорема – главный результат этой статьи. Она является аналогом теоремы 4.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ – два слова в алфавите Σ, и пусть $\widetilde{\delta}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Тогда слайд-комплекс $\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ гомеоморфен сфере, если $\widetilde{\delta}(\mathcal{Q}) = \mathcal{S}$, и диску в противном случае. Грань $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ принадлежит границе комплекса в том и только том случае, когда $\widetilde{\delta}(\mathcal{P}) \neq \mathcal{S}$.*

Доказательство. Рассмотрим *свободную группу Кокстера* $\widehat{\Pi}$, порожденную Σ, единственными соотношениями в которой являются соотношения вида $s_i^2 = e$ (т.е. значения на всех ребрах в ее графе Кокстера равны ∞). Существует естественная биекция между элементами $\widehat{\Pi}$ и словами в алфавите Σ без одинаковых букв, идущих подряд. Тогда $\widetilde{\delta}(\mathcal{S})$ соответствует произведению Демазюра слова $\mathcal{S}$, и $\widetilde{\delta}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}$ является приведенным словом в группе $\widehat{\Pi}$.

Получается, что слайд-комплекс $\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ – это просто комплекс подслов $\Delta(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ для группы $\widehat{\Pi}$. Утверждение теоремы теперь напрямую следует из [8; теорема 3.7, следствие 3.8]. Теорема доказана.

Замечание 3. Если $\widetilde{\delta}(\mathcal{S}) \neq \mathcal{S}$, слайд-комплекс не обязательно гомеоморфен диску или сфере. Например, если $\mathcal{Q} = s_1 s_1 s_1 s_1$ и $\mathcal{S} = s_1 s_1$, то комплекс $\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$ является 1-остовом тетраэдра.

Замечание 4. Другое доказательство теоремы 6 можно получить, повторяя шаги, использованные в доказательстве [8; теорема 3.7]; все утверждения, использованные при доказательстве теоремы для комплексов подслов, остаются верными и для слайд-комплексов. Набросок этого доказательства приведен в краткой заметке [12].

Пример 6 показывает, что внутренность комплекса rc-графов $w = \overline{1432}$ разбивается на слайд-комплексы. Можно считать это топологической интерпретацией разложения многочлена Шуберта $\mathfrak{S}_{1432}$ (соответственно многочлена Гротендика $\mathfrak{G}^{(\beta)}_{1432}$) в сумму слайд- (соответственно глайд-) многочленов. Следующее предложение обобщает это на случай произвольных комплексов подслов; в следующем параграфе мы применим это предложение к комплексам rc-графов.

Предложение 2. *Внутренность комплекса подслов* $\operatorname{int}(\Delta(\mathcal{Q}, w))$ *может быть представлена в виде несвязного объединения внутренностей слайд-комплексов*:

$$\operatorname{int}(\Delta(\mathcal{Q}, w)) = \bigsqcup_{\widetilde{\delta}(\mathcal{S})=\mathcal{S},\, \delta(S)=w} \operatorname{int}(\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})). \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ – внутренняя грань комплекса подслов, соответствующего элементу w. Это значит, что $\delta(\mathcal{P}) = w$. Пусть $\mathcal{S} = \widetilde{\delta}(\mathcal{P})$. Очевидно, что $\delta(\mathcal{S}) = \delta(\mathcal{P}) = w$, $\widetilde{\delta}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, и, таким образом, $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ принадлежит внутренности слайд-комплекса $\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$.

Докажем обратное. Если $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ – внутренняя грань комплекса $\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}, \mathcal{S})$, где $\widetilde{\delta}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ и $\delta(\mathcal{S}) = w$, то $\widetilde{\delta}(\mathcal{P}) = \mathcal{S}$. Значит, $\delta(\mathcal{P}) = \delta(\widetilde{\delta}(\mathcal{P})) = \delta(\mathcal{S}) = w$ и $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ – внутренняя грань комплекса подслов $\Delta(\mathcal{Q}, w)$.

Предложение доказано.

4.2. Слайд-комплексы в комплексах rc-графов. В этом разделе будет изучена связь между слайд- и глайд-орбитами rc-графов и слайд-комплексами.

Как было показано, существует биективное соответствие между rc-графами формы $w \in \mathbf{S}_n$, как приведенными, так и неприведенными, и внутренними гранями комплекса $\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, w)$. Этот комплекс гомеоморфен диску, если $w \neq w_0$.

Предложение 3. *Разбиение внутренности комплекса $\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, w)$ на внутренности слайд-комплексов согласуется с разбиением множества* $\mathrm{PD}(w)$ *на глайд-орбиты: существует биекция между* rc*-графами из каждой глайд-орбиты и внутренними гранями соответствующего слайд-комплекса.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathrm{PD}(w)$ – rc-граф, соответствующий подслову $\mathrm{word}(P)$ в $\mathcal{Q}_{0,n} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n(n-1)/2})$.

Допустим, слайд-движение S_i действует на P не тождественно: оно перемещает крест на позиции (i, j) вниз-влево на позицию $(i+1, j-1)$. Пусть σ_k и σ_{k+m} – две буквы в $\mathcal{Q}_{0,n}$, соответствующие старому и новому положению этого креста (обе эти буквы равны s_{i+j-1}). Поскольку в i-м ряду rc-графа P нет крестов слева от j-го столбца, а в $(i+1)$-м ряду нет крестов справа от $(j-1)$-го столбца, то буквы $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+m-1}$ не встречаются в подслове $\mathrm{word}(P)$. Слайд-движение S_i действует на $\mathrm{word}(P)$ следующим образом: в слово $\mathrm{word}(P)$ входят либо обе буквы σ_k и σ_{k+m}, либо только σ_k. А в слово $\mathrm{word}(S_i(P))$ входит только буква σ_{k+m}, но не σ_k.

Таким образом, все слайд-движения либо не меняют слово $\mathrm{word}(P)$, либо заменяют две последовательные буквы $s_{i+j-1}s_{i+j-1}$ в нем на s_{i+j-1}. А значит, слайд-движения сохраняют $\widetilde{\delta}$, т.е. $\widetilde{\delta}(\mathrm{word}(P)) = \widetilde{\delta}(\mathrm{word}(S_i(P)))$, и любые два rc-графа из одной глайд-орбиты принадлежат внутренности одного и того же слайд-комплекса.

Обратное тоже верно. Рассмотрим $P \in \mathrm{PD}(w)$. Пусть σ_k и σ_{k+m} – две такие одинаковые буквы в $\mathcal{Q}_{0,n}$, что

- подслово $\mathrm{word}(P)$ содержит либо только σ_k, либо обе эти буквы;
- промежуток $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+m-1}$ не содержит букв, равных $\sigma_k = \sigma_{k+m}$;
- буквы $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+m-1}$ не встречаются в слове $\mathrm{word}(P)$.

Тогда замена σ_k или пары букв (σ_k, σ_{k+m}) в подслове $\mathrm{word}(P)$ на букву σ_{k+m} соответствует применению какого-то слайд-движения к P (и сохраняет $\widetilde{\delta}(\mathrm{word}(P))$). Теперь легко видеть, что rc-граф Q является квазияманучиевым тогда и только тогда, когда в $\mathrm{word}(Q) = \mathcal{S}$ не содержится последовательных одинаковых букв, и подслово $\mathrm{word}(Q)$ является самым правым вхождением (т.е. ни одну букву нельзя сдвинуть вправо описанной операцией) слова $\mathcal{S}$ в $\mathcal{Q}_{0,n}$. Очевидно, такое самое правое вхождение является единственным.

Таким образом, если $\widetilde{\delta}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}_{0,n}$ содержит $\mathcal{S}$ в качестве подслова, то существует единственный квазияманучиев rc-граф Q, для которого $\mathrm{word}(Q) = \mathcal{S}$.

Если rc-граф $P \in \mathrm{PD}(w)$ удовлетворяет условию $\widetilde{\delta}(\mathrm{word}(P)) = \mathcal{S}$, то можно видеть, что $\mathrm{word}(\mathrm{dst}(P)) = \mathcal{S}$, и, следовательно, $\mathrm{dst}(P) = Q$ и $P \in \mathrm{dst}^{-1}(Q)$.

Иными словами, если $\mathrm{word}(P_1)$ и $\mathrm{word}(P_2)$ принадлежат внутренности одного и того же слайд-комплекса, то $\widetilde{\delta}(\mathrm{word}(P_1)) = \widetilde{\delta}(\mathrm{word}(P_2))$, и P_1 и P_2 принадлежат одной и той же глайд-орбите. Предложение доказано.

Можно вывести из этого следствие, аналогичное следствию 2: глайд-многочлен можно получить как сумму мономов по внутренним граням соответствующего слайд-комплекса.

Следствие 4. *Пусть $Q \in \mathrm{QPD}(w)$. Тогда*

$$\mathcal{G}_Q^{(\beta)} = \sum_{\mathcal{P} \in \mathrm{int}(\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}_{0,n}, \mathrm{word}(Q)))} \beta^{\mathrm{codim}(\mathcal{P})} \mathbf{x}^{\mathcal{P}}.$$

Здесь через $\mathbf{x}^{\mathcal{P}}$ мы обозначаем моном для rc-графа, соответствующего грани $\mathcal{P}$.

Рассматривая специализацию при $\beta = 0$, мы получаем аналогичное утверждение для слайд-многочленов.

Следствие 5. *Пусть $Q \in \mathrm{QPD}_0(w)$. Тогда*

$$\mathfrak{F}_Q = \sum_{\mathcal{P}} \mathbf{x}^{\mathcal{P}}$$

(суммирование ведется по всем гиперграням $\mathcal{P}$ комплекса $\widetilde{\Delta}(\mathcal{Q}_{0,n}, \mathrm{word}(Q))$).

Пример 6. На рис. 5 изображен комплекс rc-графов для перестановки $w = \overline{1432}$, представленный в виде несвязного объединения внутренностей слайд-комплексов. Квазиянучиевы rc-графы выделены синим цветом. Рядом с каждым rc-графом написан соответствующий моном $\beta^{\mathrm{ex}(P)-\mathrm{ex}(Q)}\mathbf{x}^P$ из глайд-многочлена.

Для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ обозначим $\mathrm{QPD}_k(w) = \{Q \in \mathrm{QPD}(w) \mid \mathrm{ex}(Q) = k\}$. Следующее следствие показывает, что знакопеременная сумма количеств квазиянучиевых rc-графов с данным избытком равна 1.

Следствие 6. *Для каждой перестановки $w \in \mathbf{S}_n$, верно следующее соотношение*:

$$\sum_{k=0}^{n(n-1)/2} (-1)^k |\,\mathrm{QPD}_k(w)| = 1.$$

Доказательство. Поскольку слайд-комплексы гомеоморфны дискам, а эйлерова характеристика диска равна 1, аналогично следствию 3 мы получаем

$$\mathcal{G}_Q^{(-1)}(1, \ldots, 1) = 1$$

для каждого $Q \in \mathrm{QPD}(w)$. Рассмотрим специализацию равенства

$$\mathfrak{G}_w^{(\beta)}(\mathbf{x}) = \sum_{Q \in \mathrm{QPD}(w)} \beta^{\mathrm{ex}(Q)} \mathcal{G}_Q^{(\beta)}(\mathbf{x})$$

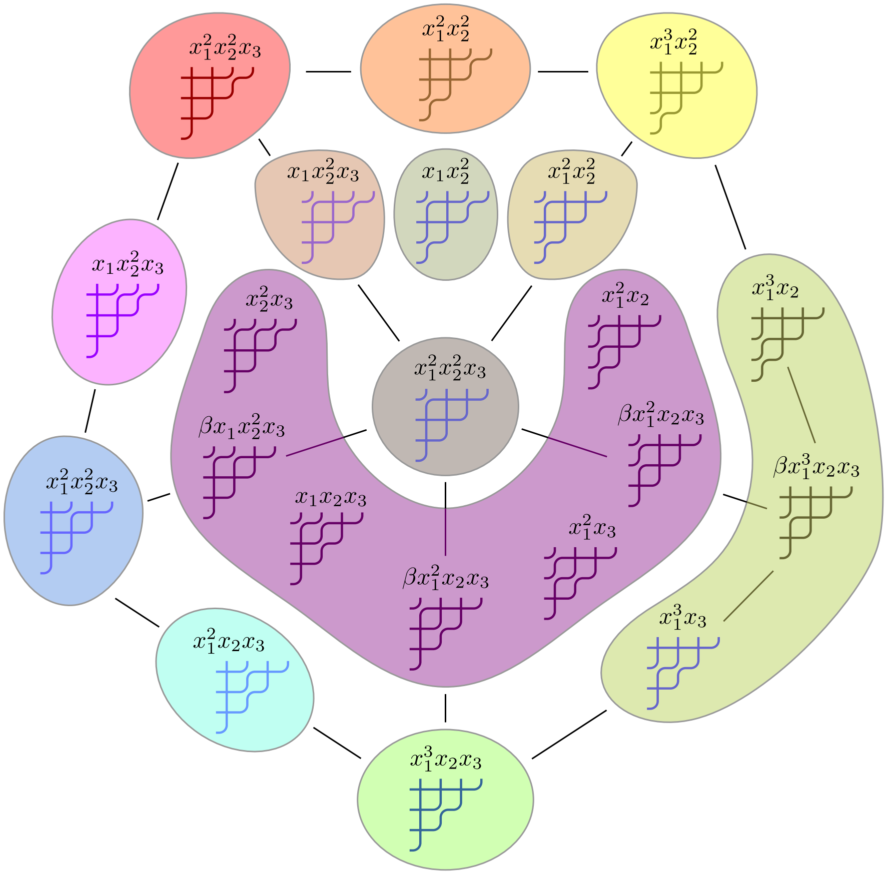


Рис. 5. Комплекс rc-графов для перестановки $w = \overline{1432}$, представленный в виде объединения слайд-комплексов.

при $\beta = -1$ и $\mathbf{x} = (1,\dots,1)$ и используем тот факт, что $\mathfrak{G}_w^{(-1)}(1,\dots,1) = \mathcal{G}_Q^{(-1)}(1,\dots,1) = 1$ для всех $w \in \mathbf{S}_n, Q \in \operatorname{QPD}(w)$. Получаем требуемую формулу:

$$1 = \sum_{Q \in \operatorname{QPD}(w)} (-1)^{\operatorname{ex}(Q)} = \sum_{k=0}^{n(n-1)/2} (-1)^k |\operatorname{QPD}_k(w)|.$$

Следствие доказано.

4.3. Замечание про графы флипов. В. Пило и К. Штумп в [13] описали алгоритм[2], позволяющий перечислять все гиперграни комплекса подслов. Для этого конструируется так называемый *граф флипов* данного комплекса. Этот граф, впервые определенный в [8; замечание 4.5], является графом смежности гиперграней комплекса подслов: вершины графа соответствуют гиперграням

[2] Мы благодарны рецензенту, обратившему наше внимание на работу [13].

комплекса подслов, и две вершины соединены ребром, если у соответствующих гиперграней есть общая грань коразмерности 1. Существует каноническая ориентация этого графа, превращающая его в частично упорядоченное множество. Стрелки в этой ориентации называются *повышающими флипами.* В этом частично упорядоченном множестве существуют наибольший и наименьший элементы, называемые *положительной* (соответственно *отрицательной*) *жадной гипергранью.* Стрелки в графе с противоположной ориентацией называются *понижающими флипами*; см. [13; п. 4.2].

Эта конструкция применима к любой системе Кокстера, в том числе к свободной группе Кокстера $(\widehat{\Pi}, \Sigma)$. Оказывается, графы флипов для такой системы позволяют получить описание слайд-движений.

Предложение 4. *Пусть Q – приведенный квазиямануччиев* rc*-граф. Слайд-движения на множестве* $\mathrm{dst}_0^{-1}(Q)$ *в точности являются понижающими флипами на гипергранях* $\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, \mathrm{word}(Q))$ (*или, что то же самое, на гипергранях* $\mathrm{int}(\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, \mathrm{word}(Q))))$.

Предложение 5. *Приведенный* rc*-граф P является квазиямануччиевым, если и только если соответствующая гипергрань слайд-комплекса* $\Delta(\mathcal{Q}_{0,n}, \mathrm{word}(P))$ *является отрицательной жадной гипергранью.*

Благодарности. Мы благодарны Сами Ассаф, Александру Гайфуллину, Валентине Кириченко и Аллену Кнутсону за плодотворные обсуждения. Мы особенно признательны Оливеру Печенику, указавшему способ упростить доказательство основного результата. Мы также хотели бы поблагодарить анонимного рецензента, замечания которого существенно улучшили изложение.

Список литературы

[1] S. Assaf, D. Searles, "Schubert polynomials, slide polynomials, Stanley symmetric functions and quasi-Yamanouchi pipe dreams", *Adv. Math.*, **306** (2017), 89–122.

[2] N. Bergeron, S. Billey, "RC-graphs and Schubert polynomials", *Experiment. Math.*, **2**:4 (1993), 257–269.

[3] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, "Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P", *УМН*, **28**:3(171) (1973), 3–26; англ. пер.: I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, "Schubert cells and cohomology of the spaces G/P", *Russian Math. Surveys*, **28**:3 (1973), 1–26.

[4] L. J. Billera, J. Scott Provan, "A decomposition property for simplicial complexes and its relation to diameters and shellings", *Second international conference on combinatorial mathematics* (New York, 1978), Ann. New York Acad. Sci., **319**, New York Acad. Sci., New York, 1979, 82–85.

[5] L. Escobar, K. Mészáros, "Subword complexes via triangulations of root polytopes", *Algebr. Comb.*, **1**:3 (2018), 395–414.

[6] S. Fomin, A. N. Kirillov, "Grothendieck polynomials and the Yang–Baxter equation", *Formal power series and algebraic combinatorics/Séries formelles et combinatoire algébrique*, DIMACS, Piscataway, NJ, 1994, 183–190.

[7] S. Fomin, A. N. Kirillov, "The Yang–Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials" (Florence, 1993), *Discrete Math.*, **153**:1-3, Proceedings of the 5th conference on formal power series and algebraic combinatorics (1996), 123–143.

[8] A. Knutson, E. Miller, “Subword complexes in Coxeter groups”, *Adv. Math.*, **184**:1 (2004), 161–176.

[9] A. Knutson, E. Miller, “Gröbner geometry of Schubert polynomials”, *Ann. of Math.* (2), **161**:3 (2005), 1245–1318.

[10] A. Lascoux, “Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux”, *The Grothendieck Festschrift*, v. III, Mod. Birkhäuser Class., **88**, Birkhäuser/Springer, Cham, 2007, 1–34.

[11] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, “Polynômes de Schubert”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* I *Math.*, **294**:13 (1982), 447–450.

[12] Е. Ю. Смирнов, А. А. Тутубалина, “Слайд-комплексы и комплексы подслов”, *УМН*, **75**:6(456) (2020), 177–178; англ. пер.: E. Yu. Smirnov, A. A. Tutubalina, “Slide complexes and subword complexes”, *Russian Math. Surveys*, **75**:6 (2020), 1162–1164.

[13] V. Pilaud, Ch. Stump, “EL-labelings and canonical spanning trees for subword complexes”, *Discrete geometry and optimization*, Fields Inst. Commun., **69**, Springer, New York, 2013, 213–248.

[14] O. Pechenik, D. Searles, “Decompositions of Grothendieck polynomials”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2019**:10 (2019), 3214–3241.

Евгений Юрьевич Смирнов
(Evgeny Yu. Smirnov)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва;
Независимый Московский университет
E-mail: esmirnov@hse.ru

Поступила в редакцию
09.07.2020 и 08.04.2021

Анна Алексеевна Тутубалина
(Anna A. Tutubalina)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: anna.tutubalina@gmail.com