

Летняя школа «Современная математика»  
Дубна, июль 2008

Е. Ю. Смирнов

# Группы отражений и правильные многогранники

Москва  
Издательство МЦНМО  
2009

УДК 514.113.5, 512.542  
ББК 22.1.51, 22.14  
С50

**Смирнов Е. Ю.**

С50 Группы отражений и правильные многогранники. — М.: МЦНМО, 2009. — 48 с.

ISBN 978-5-94057-525-2

Брошюра написана по материалам цикла лекций, прочитанных автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 20—26 июля 2008 г. В ней излагается классификация правильных многогранников в евклидовом пространстве произвольной размерности. Попутно читатель знакомится с такими важными алгебраическими понятиями, как группы отражений и системы корней.

Материал, изложенный в брошюре, иллюстрирует связь геометрии, теории групп и комбинаторики.

Брошюра адресована студентам младших курсов.

ББК 22.1.51, 22.14

Евгений Юрьевич Смирнов

ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ И ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Редактор В. А. Клепцын

Подписано в печать 3.07.2009 г. Формат 60 × 90  $\frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография „САРМА“»

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–72–85. E-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru)

---

ISBN 978-5-94057-525-2

© Смирнов Е. Ю., 2009.

© МЦНМО, 2009.

## Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>Лекция 1</b> . . . . .	7
1.1. Правильные многогранники в размерностях 2 и 3 . . . . .	7
1.2. Группы отражений: основные определения и первые примеры . . . . .	10
<b>Лекция 2</b> . . . . .	13
2.1. Системы корней . . . . .	13
2.2. Простые и положительные корни . . . . .	14
2.3. Сопряженность систем простых и положительных корней . . . . .	18
2.4. Группа $W$ порождается простыми отражениями . . . . .	18
2.5. Многогранные конусы и двойственность . . . . .	19
2.6. Камеры Вейля и фундаментальная область группы отражений . . . . .	20
<b>Интермедия: группы отражений и кватернионы</b> . . . . .	23
2 $\frac{1}{2}$ .1. Двулистное накрытие $Sp(1) \rightarrow SO(3)$ . . . . .	23
2 $\frac{1}{2}$ .2. Конечные подгруппы в $\mathbb{H}$ суть системы корней . . . . .	24
2 $\frac{1}{2}$ .3. Бинарные группы платоновых тел . . . . .	25
<b>Лекция 3</b> . . . . .	27
3.1. Графы Кокстера: определение . . . . .	27
3.2. Классификация конечных групп отражений: формулировка результата . . . . .	28
3.3. Доказательство теоремы 3.5: инструментарий . . . . .	29
3.4. Доказательство теоремы 3.5: необходимость . . . . .	31
3.5. Доказательство теоремы 3.5: достаточность . . . . .	34
<b>Лекция 4</b> . . . . .	37
4.1. Правильные многогранники и их группы симметрий . . . . .	37
4.2. Образующие группы $Sym M$ и соотношения между ними . . . . .	39
4.3. Система корней группы $Sym M$ . . . . .	40
4.4. Построение правильного многогранника по его группе симметрий . . . . .	42
4.5. Подсчет числа граней у правильных многогранников . . . . .	45
Литература . . . . .	48

## Введение

Основной целью нашего курса является описание всех правильных многогранников в пространстве произвольной размерности. На плоскости для всякого  $m \geq 3$  существует ровно один (с точностью до подобия) правильный  $m$ -угольник. В трехмерном пространстве правильных многогранников пять: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. А что происходит в пространствах других размерностей?

\* \* \*

Правильные многогранники известны человечеству с давних времен. Так, например, недавно в Шотландии при раскопках были обнаружены камни, ограниченные в виде всех пяти правильных многогранников. Эти находки относят ко второму тысячелетию до нашей эры.

Первое письменное упоминание о правильных многогранниках принадлежит грекам. Пифагорейцам были известны тетраэдр, куб и октаэдр. Описание додекаэдра и икосаэдра приписывается Теэтету Афинскому (начало IV в. до н. э.); по-видимому, он же доказал, что других правильных многогранников не существует.

Наиболее известное описание правильных многогранников содержится в диалоге Платона «Тимей», написанном около 360 г. до н. э. Именно поэтому они часто называются платоновыми телами. В «Тимее» приводятся конструкции четырех многогранников и говорится, что они олицетворяют четыре стихии: тетраэдр — это огонь, куб — земля, октаэдр — воздух, а икосаэдр — вода. Додекаэдр, согласно Платону, символизирует Вселенную.

Идеи о ключевой роли правильных многогранников в устройстве мироздания пытался развить Иоганн Кеплер в своей работе «Mysterium Cosmographicum» (1596 г.). Кеплер предполагал, что если расположить пять платоновых тел в определенном порядке между шестью концентрическими сферами так, чтобы каждая сфера была описана вокруг меньшего многогранника и вписана в больший, то радиусы этих сфер будут пропорциональны расстояниям от Солнца до всех шести известных в те времена планет: Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна. Правда, впоследствии сам Кеплер на основании более точных измерений и вычислений пришел к выводу об ошибочности такой модели.

\* \* \*

Задача классификации правильных многогранников в  $\mathbb{R}^n$  была решена швейцарским геометром Людвигом Шлефли в 1852 году. Его работу [9],

TABELLA III.  
ORBIVM PLANETARIVM DIMENSIONES, ET DISTANTIAS PER QVINGQVE REGVLARIA CORPORA GEOMETRICA EXHIBENS.  
ILLVSTRISS. PRINCEPI, AC DNO, DNO FRIDERICO, DVCI WIRTEMBERGICO, ET TIBCCIO, COMITI MONTIS BELGARVM, ETC. CONSECRATA.

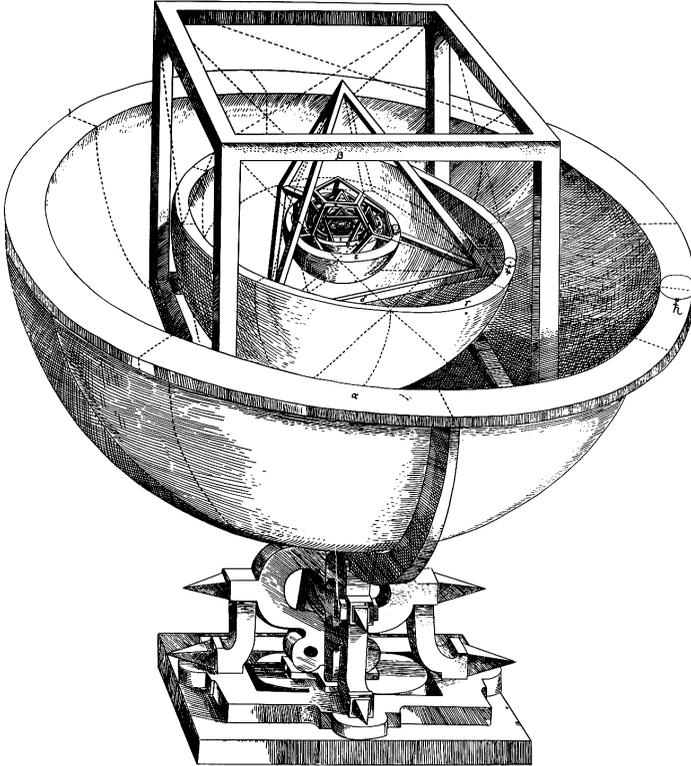


Рис. 1. Устройство Солнечной системы по Кеплеру

посвященную этой задаче, из-за ее огромного объема — более 200 страниц! — долгое время не публиковали; опубликована она была существенно позже, в 1901 году, уже после смерти ее автора.

Шлефли показал, что в пространстве размерности 5 и выше существует только три правильных многогранника: правильный *симплекс* (аналог тетраэдра), *n-мерный куб* и многогранник, двойственный к нему (аналог трехмерного октаэдра), — *кокуб*. В четырехмерном пространстве, кроме этих трех, существует еще три исключительных правильных многогранника, число граней которых равно 24, 120 и 600 соответственно.

Доказательство классификации правильных многогранников, приводимое в этой брошюре, существенно отличается от исходного доказа-

тельства Шлефли. Следуя общему принципу, восходящему к Феликсу Клейну, — «геометрия есть изучение симметрий объектов» — мы будем изучать в первую очередь не сами многогранники, а их группы симметрий. Выяснив в первой лекции, что группы симметрий правильных многогранников в размерностях 2 и 3 (а на самом деле, как будет показано в четвертой лекции, и в любой размерности) *порождены отражениями*, в следующих двух лекциях мы займемся классификацией *всех* (в том числе не связанных ни с какими многогранниками) групп, порожденных отражениями. В третьей лекции по каждой такой группе будет построен некоторый граф (называемый *графом Кокстера* этой группы), что позволит дать простое комбинаторное описание всех таких групп. Наконец, в четвертой лекции мы вернемся к правильным многогранникам и дадим при помощи полученных результатов о группах отражений описание всех таких многогранников (в любой размерности).

### Об этой брошюре

Эта брошюра написана по материалам одноименного курса из четырех занятий, прочитанного мною в июле 2008 г. на VIII летней школе «Современная математика» в Дубне. По сравнению с записками, раздававшимися слушателям после занятий, текст существенно переработан и расширен.

Большинство участников этих занятий составляли студенты первого и второго курсов математических специальностей. Поэтому те конструкции и утверждения, которые обычно проходятся в стандартных университетских курсах линейной и общей алгебры, я либо предполагал известными, либо ограничивался кратким напоминанием. То же применимо и к этой брошюре, пожалуй, за одним лишь исключением: для явной конструкции правильных многогранников в размерности 4 в тексте используется понятие кватернионов, которое, к сожалению, не всегда освещается в курсах алгебры. Не знакомый с этим понятием читатель может прочесть о нем, например, в брошюре [1].

Я благодарен организаторам школы за предоставленную возможность прочесть этот курс, а также всем слушателям за их активное участие, многочисленные содержательные вопросы, комментарии и обсуждения. Я признателен В. И. Арнольду, сообщившему мне конструкцию исключительных правильных многогранников, использующую кватернионы, и Г. А. Мерзону, сделавшему ряд ценных замечаний к тексту. Отдельно хочу поблагодарить В. А. Клепцына за постоянную помощь и поддержку; и курс, и эти записки появились во многом благодаря его искреннему интересу, настойчивости и доброжелательности.

# Лекция 1

Свет мой, зеркальце, скажи...  
А. С. Пушкин

## 1.1. Правильные многогранники в размерностях 2 и 3

Пусть  $E$  — конечномерное евклидово пространство. Обозначим через  $\text{Sym } E$  группу движений пространства  $E$ .

**Определение 1.1.** Пусть  $M$  — какое-либо множество в  $E$ . Через  $\text{Sym } M$  обозначим *группу симметрий* этого множества, т. е. множество движений пространства  $E$ , переводящих  $M$  в себя (очевидным образом, оно образует группу):

$$\text{Sym } M = \{f \in \text{Sym } E \mid f(M) = M\}.$$

Через  $\text{Sym}^+ M$  будем обозначать *группу вращений множества  $M$* , т. е. группу симметрий множества  $M$ , сохраняющих ориентацию пространства.

**Определение 1.2.** *Выпуклым многогранником* называется ограниченная фигура  $M$ , полученная как пересечение конечного числа полупространств в  $E$ . *Размерностью* многогранника  $M$  называется размерность наименьшего аффинного подпространства в  $E$ , содержащего  $M$ . Многогранник называется *невырожденным*, если его размерность равна  $\dim E$ .

Далее под многогранником мы будем без дополнительных оговорок подразумевать выпуклый многогранник.

**Упражнение 1.3.** Дайте определение грани многогранника и ее размерности.

Если  $M$  — многогранник, то группа  $\text{Sym } M$  будет сохранять его центр масс. Поэтому мы можем рассматривать ее как подгруппу в группе ортогональных преобразований  $O(V)$  пространства  $V$  (поместив начало координат пространства  $V$  в центр масс многогранника).

Пусть многогранник  $M$  невырожденный. Тогда движение пространства  $E$  полностью задается образами вершин многогранника. Кроме того, при движении многогранника вершины обязаны переходить в вершины (почему?). Следовательно, имеется вложение группы  $\text{Sym } M$  в группу перестановок вершин многогранника  $M$ , т. е. в симметрическую группу

$$\text{Sym } M \hookrightarrow \text{Sym}(\text{Vert}(M)).$$

Значит,  $\text{Sym } M$  — конечная группа.

**Пример 1.4.** Пусть  $\mathbb{D}_m$  — правильный  $m$ -угольник в  $\mathbb{R}^2$ . Тогда группа  $\text{Sym } \mathbb{D}_m$  (ее называют *группой диэдра*) состоит из  $2m$  элементов,  $m$  из которых (обозначим их  $r_0, \dots, r_{m-1}$ ) являются поворотами на углы  $2\pi k/m$ , где  $0 \leq k < m$  (они же и образуют подгруппу  $\text{Sym}^+ \mathbb{D}_m$ ; при этом  $r_0 = \text{Id}$ ), а другие  $m$  суть симметрии  $s_1, \dots, s_m$  относительно прямых, соединяющих вершины  $m$ -угольника и середины его сторон с его центром.

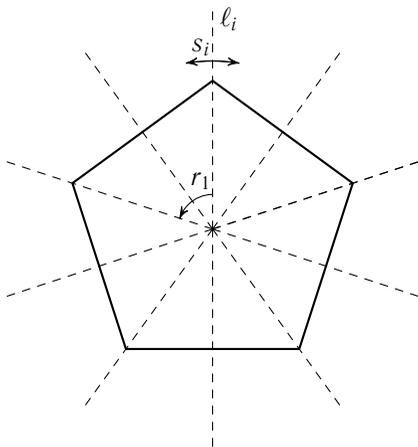


Рис. 2. Образующие группы диэдра

**Упражнение 1.5.** Покажите, что  $\text{Sym } \mathbb{D}_m$  порождается как группа двумя преобразованиями: поворотом  $r_1$  на угол  $2\pi/m$  и любой из симметрий  $s_k$ .

**Упражнение 1.6.** Опишите классы сопряженности в группе диэдра (рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного  $m$ ).

Нетрудно выяснить, чему равна композиция двух произвольных осевых симметрий на плоскости.

**Упражнение 1.7.** Пусть  $s$  и  $s'$  — осевые симметрии относительно прямых  $\ell$  и  $\ell'$  соответственно. Покажите, что  $s's$  есть поворот на угол  $2\theta$ , где  $\theta$  — угол между прямыми  $\ell$  и  $\ell'$ .

**Замечание.** Отсюда следует, что осевые симметрии  $s$  и  $s'$  порождают конечную группу тогда и только тогда, когда угол  $\theta$  (в обозначениях предыдущего упражнения) соизмерим с  $\pi$ .

Тем самым в группе диэдра выполнено соотношение  $s_{k+1}s_k = r_1$ . Иными словами, композиция симметрий относительно двух осей симметрии, угол между которыми минимален (т.е. составляет  $\pi/m$ ), есть поворот на угол  $2\pi/m$ . Мы получили еще один способ породить группу диэдра двумя

элементами:

$$\text{Sym } M = \langle s_k, s_{k+1} \rangle.$$

**Упражнение 1.8.** Пусть  $g$  и  $g'$  — два элемента из группы диэдра  $\mathbb{D}_m$ . Выясните, при каких условиях  $g$  и  $g'$  порождают всю группу  $\text{Sym } \mathbb{D}_m$ .

Теперь перейдем к описанию групп симметрий правильных многогранников в  $\mathbb{R}^3$ . Начнем с тетраэдра.

**Предложение 1.9.** Пусть  $T \subset \mathbb{R}^3$  — правильный тетраэдр. Тогда  $\text{Sym } T \cong \mathfrak{S}_4$ .

**Доказательство.** Как мы уже знаем, группа симметрий многогранника вкладывается в группу перестановок его вершин:  $\text{Sym } T \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$ .

Докажем, что образ этого вложения в случае тетраэдра есть вся группа перестановок  $\mathfrak{S}_4$ . Для этого достаточно показать, что группа  $\text{Sym } T$  содержит все симметрии, соответствующие транспозициям, т. е. перестановкам, меняющим местами два элемента из четырех и оставляющим на месте два других элемента.

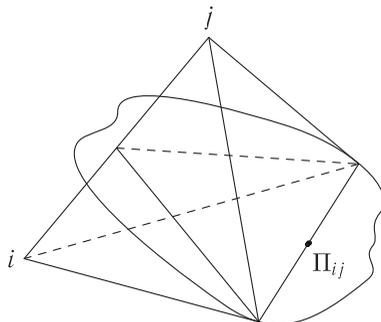


Рис. 3. Симметрия относительно плоскости  $\Pi_{ij}$  соответствует транспозиции  $(ij)$

Предъявим симметрию тетраэдра  $\sigma_{ij}$ , соответствующую транспозиции  $(ij)$ . Это будет симметрия относительно плоскости, проходящей через центр масс тетраэдра и перпендикулярной ребру, соединяющему  $i$ -ю и  $j$ -ю вершины. Остальные две вершины тетраэдра будут содержаться в этой плоскости, следовательно, будут неподвижны относительно  $\sigma_{ij}$  (см. рис. 3):  $\square$

Отметим, что и группа симметрий диэдра, и группа симметрий тетраэдра порождаются *отражениями* — симметриями относительно подпространств коразмерности 1; в случае диэдра это были симметрии относительно прямых, а в случае тетраэдра — симметрии относительно плоскостей.

**Упражнение 1.10.** Каким минимальным количеством отражений порождается группа  $\text{Sym } T$ ?

**Упражнение 1.11.** Покажите, что  $\text{Sym}^+ T \cong \mathfrak{A}_4$ .

Описание групп симметрий остальных правильных многогранников в  $\mathbb{R}^3$  мы оставляем читателю в качестве задачи.

**Задача 1.12. а)** Опишите группы вращений и симметрий куба и додекаэдра (они совпадают с соответствующими группами для октаэдра и икосаэдра — почему?).

**б)** Докажите, что группы симметрий куба и додекаэдра тоже порождаются отражениями (т. е. симметриями относительно плоскостей). Какое наименьшее количество отражений нужно взять, чтобы породить эти группы?

**Указание.** Для описания группы симметрий куба рассмотрите действие этой группы на четырех главных диагоналях куба. Для описания группы додекаэдра может пригодиться следующий факт: в додекаэдр можно вписать пять кубов (они называются кубами Кеплера).

## 1.2. Группы отражений: основные определения и первые примеры

Мы рассмотрели группы симметрий правильных многоугольников и платоновых тел и выяснили, что они все обладают замечательным свойством: они порождаются отражениями относительно прямых и плоскостей соответственно. Поэтому естественно было бы обобщить понятие групп, порожденных отражениями, на случай пространства произвольной размерности и изучить свойства таких групп. Этим мы сейчас и займемся.

Итак, пусть  $V$  —  $n$ -мерное евклидово векторное пространство над  $\mathbb{R}$ . Возьмем какой-нибудь ненулевой вектор  $\alpha \in V$ . Ортогональная ему гиперплоскость задается условием

$$H_\alpha = \{\beta \in V \mid (\alpha, \beta) = 0\}.$$

**Определение 1.13.** *Отражением* относительно гиперплоскости  $H_\alpha$  называется преобразование  $s_\alpha \in O(V)$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ ;
- $s_\alpha$  поточечно оставляет на месте «зеркало»  $H_\alpha$ :  $s_\alpha(\beta) = \beta$  для всех  $\beta \in H_\alpha$ .

**Упражнение 1.14** (Очень важно!). Докажите, что преобразование  $s_\alpha$  задается следующей формулой:

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2 \frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

**Определение 1.15.** Конечная подгруппа  $W \subset O(V)$  называется *группой отражений*, если существуют такие отражения  $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_r}$ , что

$$W = \langle s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_r} \rangle.$$

**Замечание.** Правильнее было бы называть  $W$  *группой, порожденной отражениями*, так как она, разумеется, состоит не только из отражений. Но «группа отражений» короче, так что мы позволим себе эту вольность речи.

**Замечание** (для специалистов). Мы определяем группу отражений как подгруппу в  $O(V)$ . Таким образом, группой отражений правильно считать не абстрактную группу, а пару, состоящую из группы  $W$  и ее фиксированного представления в пространстве  $V$ .

В завершение этой лекции мы приведем три важных серии примеров групп отражений в пространствах произвольной размерности. У этих групп даже имеются собственные названия:  $A_n$ ,  $B_n$  и  $D_n$ .

**Пример 1.16** ( $A_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ ). Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис пространства  $V$ . Рассмотрим *симметрическую группу*  $\mathfrak{S}_n$ , действующую на  $V$  перестановками базисных векторов. Заметим, что транспозиция  $(i, j)$  действует как отражение, переводящее вектор  $e_i - e_j$  в противоположный и оставляющее на месте ортогональную ему гиперплоскость (состоящую из всех векторов, у которых равны  $i$ -я и  $j$ -я координаты). Поскольку группа  $\mathfrak{S}_n$  порождена транспозициями, она является группой отражений. Заметим также, что она даже порождается  $n - 1$  транспозицией вида  $(i, i + 1)$ ; это представление пригодится нам в дальнейшем.

**Упражнение 1.17.** Убедитесь, что при таком действии  $\mathfrak{S}_n$  на  $V$  все отражения соответствуют транспозициям в  $\mathfrak{S}_n$ .

Действие  $\mathfrak{S}_n$  на  $V$  можно «уменьшить», рассмотрев в  $V$  гиперплоскость  $\tilde{V} = \langle e_1 + e_2 + \dots + e_n \rangle^\perp$ . Поскольку вектор  $e_1 + e_2 + \dots + e_n$  инвариантен относительно  $\mathfrak{S}_n$ , группа  $\mathfrak{S}_n$  действует и на  $\tilde{V}$ . У этого действия уже нет ненулевых инвариантных векторов; действие, обладающее данным свойством, называется *эффективным*.

**Пример 1.18** ( $B_n$ ,  $n \geq 1$ ). Пусть снова  $V = \mathbb{R}^n$ . Пусть на  $V$ , как и в предыдущем примере, действует перестановками координат группа  $\mathfrak{S}_n$ . Рассмотрим еще  $n$  отражений  $s_{e_i}$ , каждое из которых будет переводить базисный вектор  $e_i$  в  $-e_i$  и оставлять все остальные базисные векторы на месте. Эти смены знаков образуют группу порядка  $2^n$ , изоморфную  $(\mathbb{Z}_2)^n$ . Полученные две группы пересекаются тривиально, и  $(\mathbb{Z}_2)^n$  есть нормальная подгруппа в их произведении (так как если оператор смены знака сопрягается при помощи какой-либо перестановки координат, то получается другой оператор смены знака). Итак, на  $V$  действует группа  $W$ , являющаяся произведением этих двух групп и имеющая порядок  $2^n \cdot n!$ . Нетрудно проверить, что это действие эффективно.

**Замечание.** Полученная конструкция является *полупрямым произведением* групп  $\mathfrak{S}_n$  и  $(\mathbb{Z}_2)^n$ ; ее принято обозначать  $\mathfrak{S}_n \rtimes (\mathbb{Z}_2)^n$ .

**Пример 1.19** ( $D_n$ ,  $n \geq 4$ ). Эта группа будет подгруппой индекса 2 в только что описанной группе  $B_n$ . А именно, разрешим переставлять координаты при помощи  $\mathfrak{S}_n$  и менять знак у *четного* количества координат. Получим группу, порожденную отражениями относительно  $e_i - e_j$  и  $e_i + e_j$ , где  $i \neq j$ . Это действие тоже будет эффективным (проверьте это!).

**Упражнение 1.20. а)** Докажите, что  $A_2 \cong \text{Sym } \mathbb{D}_3$ , а  $B_2 \cong \text{Sym } \mathbb{D}_4$ .

**б)** Докажите, что группы  $A_3$  и  $D_3$  изоморфны.

**Упражнение 1.21** (продолжение задачи 1.12). Какие из трех групп симметрий платоновых тел принадлежат сериям  $A_n$ ,  $B_n$  или  $D_n$ ? Чему равны соответствующие значения  $n$ ?

## Лекция 2

Зри в корень!  
Козьма Прутков

В прошлой лекции мы начали рассматривать группы отражений — которыми, в частности, оказались группы симметрий правильных многоугольников на плоскости и правильных многогранников в  $\mathbb{R}^3$ . Как мы докажем в лекции 4, такой будет и группа симметрий правильного многогранника произвольной размерности. Поэтому естественно изучить группы отражений более подробно, чем мы сейчас и займемся. Для этого нам понадобится такой инструмент, как *системы корней*.

### 2.1. Системы корней

Пусть  $W$  — группа отражений, действующая на пространстве  $V$ .

**Предложение 2.1.** Если  $t \in O(V)$  — произвольное ортогональное преобразование, а  $s_\alpha \in W$  — отражение относительно вектора  $\alpha$ , то  $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$  — отражение относительно вектора  $t\alpha$ . В частности, если  $w \in W$ , то и  $s_{w\alpha} \in W$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $ts_\alpha t^{-1}$  переводит вектор  $t\alpha$  в противоположный ему. Так что нужно лишь показать, что  $ts_\alpha t^{-1}$  поточечно оставляет на месте гиперплоскость  $H_{t\alpha}$ . Заметим, что условие  $\lambda \in H_\alpha$  равносильно тому, что  $t\lambda \in H_{t\alpha}$ , так как  $(\alpha, \lambda) = (t\alpha, t\lambda)$ . Значит,  $(ts_\alpha t^{-1})(t\lambda) = ts_\alpha \lambda = t\lambda$ , если  $\lambda \in H_\alpha$ .  $\square$

Значит, группа  $W$  как-то переставляет прямые  $\langle \alpha \rangle$ , соответствующие всевозможным отражениям  $s_\alpha \in W$ . Фиксируем на каждой такой прямой пару векторов  $\{\alpha, -\alpha\}$ , длины которых положим равными единице. Полученный набор векторов называется *системой корней*, соответствующей группе  $W$ .

Дадим для системы корней аксиоматическое определение.

**Определение 2.2.** Конечный набор векторов  $\Phi \subset V$  называется *системой корней*, если он удовлетворяет следующим двум аксиомам:

**(R1):**  $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ ;

**(R2):**  $s_\alpha \Phi = \Phi$  для всякого  $\alpha \in \Phi$ .

Сами векторы из набора  $\Phi$  называются *корнями*.

По аксиоматически определенной системе корней  $\Phi$  можно построить группу отражений  $W$ : это будет группа, порожденная отражениями относительно всех корней из  $\Phi$ .

**Упражнение 2.3.** Покажите, что определенная таким образом группа будет конечна.

**Упражнение 2.4.** Пусть  $\Phi$  — набор из  $2m$  единичных векторов на плоскости, причем угол между любыми двумя соседними векторами равен  $\pi/m$  (на рисунке изображена ситуация  $m = 4$ ). Докажите, что  $\Phi$  является системой корней, а соответствующая группа отражений есть группа диэдра  $\text{Sym } \mathbb{D}_m$ .

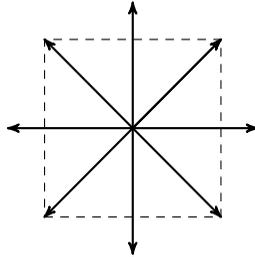


Рис. 4. Система корней группы  $B_2 \cong \text{Sym } \mathbb{D}_4$

## 2.2. Простые и положительные корни

**Определение 2.5.** Транзитивное отношение  $<$  на  $V$  называется *отношением (линейного) порядка*, если выполнены следующие условия:

- для любых не равных друг другу векторов  $\lambda, \mu \in V$  либо  $\lambda < \mu$ , либо  $\mu < \lambda$ ;
- если  $\lambda < \mu$ , то  $\lambda + \nu < \mu + \nu$  для любого вектора  $\nu \in V$ ;
- если  $\lambda < \mu$ , то  $c\lambda < c\mu$  при всех действительных  $c > 0$  и  $c\mu < c\lambda$  при всех  $c < 0$ .

Вектор  $\lambda$  называется *положительным*, если  $0 < \lambda$ .

**Замечание.** Такие отношения порядка на  $V$  существуют. А именно, с каждым базисом  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  можно связать линейный порядок на  $V$ , задаваемый лексикографически:  $\alpha = \sum a_i \lambda_i < \beta = \sum b_i \lambda_i$  тогда и только тогда, когда для некоторого  $j$  выполнено неравенство  $a_j < b_j$  и при всех  $i < j$  выполнено равенство  $a_i = b_i$  (т. е. набор  $(a_1, \dots, a_n)$  как «слово в словаре» идет раньше, чем набор  $(b_1, \dots, b_n)$ ).

**Задача 2.6.** Убедитесь, что данным примером исчерпываются все возможные отношения порядка на  $V$ . А именно, покажите, что для любого

отношения порядка существует базис  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , относительно которого это отношение порядка является лексикографическим упорядочением.

Выберем и зафиксируем какой-нибудь линейный порядок на  $V$ . С его помощью мы проведем следующую конструкцию.

**Определение 2.7.** *Системой положительных корней* в  $\Phi$  называется множество

$$\Pi = \{\alpha \in \Phi \mid 0 < \alpha\}.$$

Множество  $-\Pi$  называется *системой отрицательных корней*. Ясно, что  $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$ . Заметим, что из каждой пары корней  $\{\alpha, -\alpha\}$  ровно один является положительным, а другой — отрицательным.

**Определение 2.8.** Подмножество  $\Delta \in \Phi$  называется *системой простых корней*, если выполнены следующие два условия:

- $\Delta$  является базисом для линейной оболочки системы корней  $\Phi$ ;
- всякий вектор  $\alpha \in \Phi$  есть линейная комбинация  $\sum c_\gamma \gamma$ , где все  $\gamma$  принадлежат  $\Delta$  и все  $c_\gamma$  имеют одинаковый знак (либо все положительны, либо все отрицательны).

**Упражнение 2.9.** Рассмотрим систему корней, изображенную на рис. 5. Опишите порядок, относительно которого множество корней, лежащих в заштрихованной области, образует систему положительных корней. Убедитесь, что два отмеченных корня образуют систему простых корней.

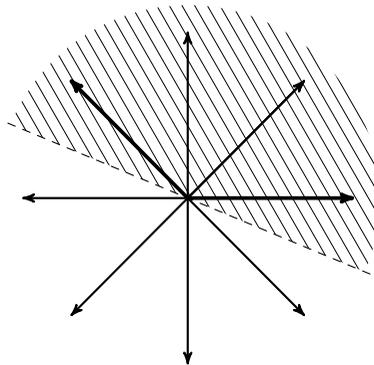


Рис. 5. Система положительных и простых корней

А priori неясно, что системы простых корней вообще существуют. Их существование вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 2.10.** 1. Если  $\Delta$  — система простых корней, то существует единственная система положительных (относительно некоторого упорядочения на  $V$ ) корней  $\Pi$ , содержащая  $\Delta$ .

2. Всякая система положительных корней  $\Pi$  содержит единственную систему простых корней  $\Delta$  (в частности, таковые существуют).

**Доказательство.** 1. Единственность следует из того, что все неотрицательные линейные комбинации векторов из  $\Delta$ , лежащие в  $\Phi$ , должны принадлежать  $\Pi$ , т. е. множество  $\Pi$  определено однозначно. Чтобы показать, что  $\Pi$  существует, дополним  $\Delta$  до базиса всего пространства  $V$  и возьмем в качестве  $\Pi$  множество векторов из  $\Phi$ , положительных относительно соответствующего лексикографического упорядочения.

2. Единственность: пусть  $\Pi$  содержит систему простых корней  $\Delta$ ; тогда  $\Delta$  определяется однозначно как множество векторов из  $\Pi$ , не представимых в виде положительной линейной комбинации двух и более векторов из  $\Pi$ .

Существование. Выберем минимальную систему (по включению)  $\tilde{\Delta} \in \Pi$ , обладающую тем свойством, что всякий корень в  $\Pi$  есть неотрицательная линейная комбинация корней из  $\tilde{\Delta}$ . Такая система с очевидностью существует; надо доказать, что она линейно независима. Это будет следовать из такого утверждения, которое мы докажем чуть ниже.

**Утверждение 2.11.** Для любой пары не равных друг другу корней  $\alpha, \beta \in \tilde{\Delta}$  выполняется неравенство  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .

Докажем по модулю этого утверждения, что система  $\tilde{\Delta}$  линейно независима. Пусть имеется некоторая нетривиальная линейная комбинация  $\sum a_i \alpha_i = 0$ . Перенесем все слагаемые, коэффициенты перед которыми отрицательны, в правую часть. Получим равенство

$$\sigma = \sum b_i \beta_i = \sum c_i \gamma_i, \quad \text{где } b_i, c_i > 0.$$

Тогда согласно вышеприведенному утверждению

$$0 \leq (\sigma, \sigma) = \left( \sum b_i \beta_i, \sum c_i \gamma_i \right) \leq 0,$$

откуда следует, что  $\sigma = 0$ , и мы получаем противоречие.

Осталось доказать утверждение. Пусть оно неверно для некоторых  $\alpha, \beta \in \tilde{\Delta}$ . Запишем

$$s_\alpha \beta = \beta - c\alpha, \quad \text{где } c = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} > 0.$$

Поскольку  $s_\alpha \beta \in \Phi$ , мы заключаем, что либо  $s_\alpha \beta \in \Pi$ , либо  $-s_\alpha \beta \in \Pi$ .

Рассмотрим сначала случай  $s_\alpha \beta \in \Pi$ . Пусть  $s_\alpha \beta = \sum c_\gamma \gamma$ , где все корни  $\gamma$  простые, а все  $c_\gamma$  не меньше 0. Возможны два подслучая.

а) Коэффициент  $c_\beta < 1$ . Тогда

$$s_\alpha \beta = \beta - c\alpha = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma.$$

Значит,

$$(1 - c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma.$$

Получается, что один простой корень выражен как положительная линейная комбинация других, что противоречит минимальности.

б) Пусть  $c_\beta \geq 1$ . Аналогичным образом получаем

$$0 = (c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma.$$

Получается, что линейная комбинация векторов из  $\Pi$  с положительными коэффициентами равна нулю, что невозможно в силу аксиом линейного порядка.

Аналогично можно проверить, что  $s_\alpha \beta \notin -\Pi$ . □

**Упражнение 2.12.** Прделайте это.

**Следствие 2.13** (из доказательства). *Если  $\Delta$  — система простых корней, то  $(\alpha, \beta) \leq 0$  для всех  $\alpha, \beta \in \Delta$ . Иначе говоря, все углы между простыми корнями неострые.*

**Задача 2.14.** Найдите системы положительных и простых корней для систем корней, соответствующих группам отражений, которые были описаны в конце прошлой лекции (серии  $A, B, D$ ).

Ответ на эту задачу приведён в следующей таблице. Здесь через  $e_1, \dots, e_n$  обозначен ортонормированный базис в пространстве  $V \cong \mathbb{R}^n$ . Линейный порядок, определяющий указанные в таблице системы положительных корней, — это связанный с этим базисом лексикографический порядок.

Системы корней типов  $A, B$  и  $D$

$A_{n-1}$	$\Phi$	$e_i - e_j, \quad 1 \leq i, j \leq n$
	$\Pi$	$e_i - e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n$
	$\Delta$	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n$
$B_n$	$\Phi$	$\pm e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i, j \leq n; \quad \pm e_i, \quad 1 \leq i \leq n$
	$\Pi$	$e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n; \quad e_i, \quad 1 \leq i \leq n$
	$\Delta$	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n$
$D_n$	$\Phi$	$\pm e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i, j \leq n$
	$\Pi$	$e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n$
	$\Delta$	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n$

### 2.3. Сопряженность систем простых и положительных корней

Здесь и далее мы фиксируем систему простых и положительных корней  $\Delta \subset \Pi \subset \Phi$ .

Из определения следует, что при любом  $w \in W$  множество  $w\Delta$  тоже будет системой простых корней, а  $w\Pi$  — системой положительных корней. Оказывается, если  $\alpha \in \Delta$ , то  $s_\alpha\Pi$  и  $\Pi$  отличаются на один корень.

**Предложение 2.15.** Пусть  $\Delta \subset \Pi$ , и  $\alpha \in \Delta$ . Тогда  $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$  и  $\beta = \sum c_\gamma \gamma$  — представление  $\beta$  в виде линейной комбинации простых корней. При некотором векторе  $\gamma \neq \alpha$  найдется строго положительный коэффициент  $c_\gamma > 0$ . Отразим  $\beta$  относительно  $\alpha$ :

$$s_\alpha \beta = \beta - c\alpha.$$

Коэффициент при  $\gamma$  в разложении  $s_\alpha \beta$  не изменится (т. е. он равен  $c_\gamma$ ). Значит,  $s_\alpha \beta$  — положительный корень. При этом ясно, что он не равен  $\alpha$ . Следовательно,

$$s_\alpha : \Pi \setminus \{\alpha\} \rightarrow \Pi \setminus \{\alpha\}. \quad \square$$

Из этого предложения нетрудно вывести теорему, показывающую, что геометрически все системы положительных и простых корней для данной системы корней устроены одинаково.

**Теорема 2.16.** Все положительные (соответственно простые) системы корней в  $\Phi$  сопряжены друг другу относительно действия группы  $W$ .

**Задача 2.17.** Докажите эту теорему.

Из доказанных утверждений получается полезное следствие: оказывается, для каждого корня найдется содержащая его система простых корней (т. е. каждый корень может играть роль простого корня).

**Следствие 2.18.** Для данной системы простых корней  $\Delta$  и данного корня  $\beta$  найдется такой элемент  $w \in W$ , что  $w \cdot \beta \in \Delta$ .

**Упражнение 2.19.** Пусть  $\Phi$  — система корней ранга  $n$ , и пусть  $\Delta' \subset \Phi$  — набор  $n$  векторов из  $\Phi$ , попарные углы между которыми равняются попарным углам между векторами системы простых корней  $\Delta \subset \Phi$ . Докажите, что тогда  $\Delta'$  тоже является системой простых корней.

### 2.4. Группа $W$ порождается простыми отражениями

У простых корней есть замечательное свойство: несмотря на то что они обычно составляют лишь незначительную часть системы корней, отражения относительно них порождают всю группу  $W$ . Мы это уже видели

в случае группы диэдра, где группа порождалась двумя отражениями. Докажем это в общем случае.

**Теорема 2.20.** Пусть  $\Delta$  — система простых корней. Тогда  $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$ .

**Доказательство.** Пусть  $W' = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$  — подгруппа в  $W$ , порожденная простыми отражениями. Докажем, что она совпадает со всей группой.

**Задача 2.21.** Докажите, что для всякого положительного корня  $\gamma$  найдется корень  $\alpha \in \Delta$ , для которого  $(\gamma, \alpha) > 0$ .

**Определение 2.22.** Пусть  $\beta \in \Phi$ ,  $\beta = \sum c_\gamma \gamma$ , где  $\gamma \in \Delta$ . Высотой корня  $\beta$  называется число  $\text{ht}(\beta) = \sum c_\gamma$ . В частности, высота всякого простого корня равна 1.

**Упражнение 2.23.** Пусть  $\beta \in \Pi$ . Возьмем множество  $W'\beta \cap \Pi$  (оно непусто, так как содержит  $\beta$ ) и выберем в нем элемент  $\gamma$  минимальной высоты. Докажите, что  $\gamma \in \Delta$  (т. е. всякий положительный корень может быть переведен в простой при помощи лишь простых отражений).

**Упражнение 2.24.** Выведите отсюда, что  $W'\Delta = \Phi$ .

**Упражнение 2.25.** Выведите из предыдущего упражнения и предложения 2.1, что  $W = W'$ .

Это завершает доказательство теоремы 2.20.  $\square$

## 2.5. Многогранные конусы и двойственность

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V$  — произвольный набор ненулевых векторов. Рассмотрим *многогранный конус*, порожденный этим набором, т. е. множество линейных комбинаций этих векторов с неотрицательными коэффициентами:

$$K = \{c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k \mid c_i \geq 0\} \subset V.$$

Можно рассмотреть множество

$$K^\vee = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha_i) \geq 0 \quad \forall i\} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \mu) \geq 0 \quad \forall \mu \in K\}.$$

Оно, очевидно, тоже будет являться конусом. Будем называть этот конус *двойственным* к  $K$ .

**Упражнение 2.26.** Докажите, что  $(K^\vee)^\vee = K$ .

*Внутренностью*  $\text{Int } K$  конуса  $K$  будем называть его множество внутренних точек (в стандартной топологии в  $\mathbb{R}^n$ ). Если конус  $K$  невырожден (т. е. векторы  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  порождают все пространство  $V$ ), то  $\text{Int } K$  есть множество *положительных* линейных комбинаций векторов  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ :

$$\text{Int } K = \{c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k \mid c_i > 0\}.$$

В противном случае  $\text{Int } K = \emptyset$ .

**Задача 2.27.** Пусть  $K$  и  $L$  — два многогранных конуса. Докажите, что  $L \subset K$  тогда и только тогда, когда  $K^\vee \subset L^\vee$ .

Обозначим через  $-K$  образ конуса  $K$  при центральной симметрии относительно нуля.

**Предложение 2.28.** Если  $K$  — многогранный конус. Тогда  $\lambda \in K \cup (-K)$  тогда и только тогда, когда гиперплоскость  $H_\lambda = \{\mu \in V \mid (\mu, \lambda) = 0\}$  не пересекается с конусом  $\text{Int } K^\vee$ .

**Доказательство.** Пусть  $L$  — конус, порожденный одним вектором  $\lambda$ . Тогда  $L \subset K$ , а  $L^\vee$  есть полупространство, ограниченное плоскостью  $H_\lambda$  и содержащее вектор  $\lambda$ . Предложение следует из предыдущей задачи и того факта, что если  $K^\vee \subset L^\vee$ , то  $\text{Int } K^\vee \subset \text{Int } L^\vee$ .  $\square$

## 2.6. Камеры Вейля и фундаментальная область группы отражений

Теперь применим общие сведения о многогранных конусах, полученные в предыдущем пункте, к системам корней.

Фиксируем в  $\Phi$  систему простых и систему положительных корней  $\Delta \subset \Pi$ . Пусть  $K$  — конус, порожденный системой  $\Delta$  (или, что то же самое, системой  $\Pi$ ). Обозначим через  $D$  двойственный конус:

$$D = K^\vee = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \text{ для любого } \alpha \in \Delta\}.$$

Поскольку простые корни составляют базис пространства  $V$ , оба конуса  $K$  и  $D$  симплицеальны, т. е. число их ребер равно  $\dim V$ , и невырожденны, т. е. не содержатся ни в каком подпространстве меньшей размерности.

Несложно показать, что всякая  $W$ -орбита пересекается с  $D$ .

**Лемма 2.29.** Для всякого вектора  $\lambda \in V$  найдется такой элемент  $w \in W$ , что  $\mu = w \cdot \lambda \in D$ . Более того, разность  $\mu - \lambda$  является линейной комбинацией векторов из  $\Delta$  с неотрицательными коэффициентами.

**Доказательство.** Введем на  $V$  частичный порядок следующим образом:  $\lambda$  меньше либо равно  $\mu$ , если  $\mu - \lambda$  есть линейная комбинация векторов из  $\Delta$  с неотрицательными коэффициентами. (Не следует путать этот частичный порядок с введенным ранее линейным порядком, который нам более не потребуется.)

Рассмотрим орбиту  $W \cdot \lambda$  вектора  $\lambda$ . Пусть  $\mu$  — максимальный относительно данного порядка элемент в этой орбите (вообще говоря,  $\mu$  может быть не единственным). Применим к нему простое отражение  $s_\alpha$ :

$$s_\alpha \mu = \mu - 2 \frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Вектор  $s_\alpha \mu$  также принадлежит орбите  $W \cdot \lambda$ . Поскольку элемент  $\mu$  максимален, мы получаем, что  $2 \frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0$ , а значит,  $(\mu, \alpha) \geq 0$ . Это выполнено для любого простого корня  $\alpha \in \Delta$ , следовательно,  $\mu \in D$ .  $\square$

Рассмотрим множество открытых конусов  $w \cdot \text{Int } D$ , получающихся из  $\text{Int } D$  сдвигом на элемент  $w \in W$ . Эти конусы называются *камерами Вейля*.

**Пример 2.30.** Пусть  $W = \text{Sym } \mathbb{D}_3$  — группа симметрий треугольника (это группа типа  $A_2$ ). На рисунке изображена система корней для этой группы, отмечены два простых корня и показаны фундаментальный конус  $D$  и камеры Вейля (их число равняется 6 — порядку группы  $W$ ).

Как мы видим на этом рисунке, камеры Вейля не пересекаются, а их объединение есть дополнение до множества зеркал. Как мы убедимся далее, и в общем случае ситуация аналогичная.

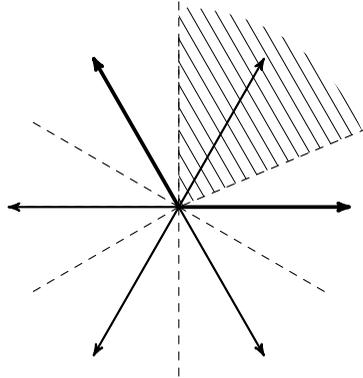


Рис. 6. Фундаментальная область группы отражений

**Предложение 2.31.** 1. Для любого корня  $\alpha \in \Phi$  соответствующая ему гиперплоскость  $H_\alpha$  не пересекается ни с какой камерой Вейля  $w \cdot \text{Int } D$ .

2. Объединение всех камер Вейля равняется всему пространству  $V$  за вычетом гиперплоскостей отражений относительно корней из  $\Phi$ :

$$W \cdot \text{Int } D = V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha.$$

3. Пусть  $\tilde{\Delta} = \{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subset \Phi$  — набор корней, составляющий базис пространства  $V$ , и пусть  $\tilde{K}$  — конус, порожденный этим набором.

ром. Предположим, что  $\text{Int } \tilde{K}^\vee$  не пересекается ни с какой гиперплоскостью  $H_\alpha$  при  $\alpha \in \Phi$ . Тогда  $\tilde{\Delta} = \omega \cdot \Delta$  (т.е.  $\tilde{\Delta}$  тоже является системой простых корней).

**Доказательство.** 1. Для любого корня  $\alpha \in \Phi$  верно, что либо он сам, либо противоположный к нему лежит в конусе  $K$ , порожденном  $\Delta$ . В силу предложения 2.28 отсюда следует, что соответствующая гиперплоскость  $H_\alpha$  не пересекается с  $\text{Int } D$ . В силу  $W$ -инвариантности системы  $\Phi$  это же верно и для любой другой камеры Вейля.

2. Возьмем какой-нибудь элемент  $\lambda \in V \setminus (W \cdot \text{Int } D)$ . В силу леммы 2.29 найдется такой элемент  $\omega \in W$ , что  $\omega \cdot \lambda \in D \setminus \text{Int } D$ . Тогда по определению конуса  $D$  мы получаем, что  $\omega \cdot \lambda \in H_\beta$ , где  $\beta$  — некоторый простой корень. Значит,  $\lambda \in H_{\omega^{-1}\beta}$ , что и требовалось.

3. Пусть  $\alpha \in \Phi$ . Из предложения 2.28 следует, что либо  $\alpha$ , либо  $-\alpha$  лежит в конусе  $\tilde{K}$ . Это значит, что  $\alpha$  выражается через  $\beta_1, \dots, \beta_r$  с коэффициентами одного знака. Но согласно определению 2.8 это и значит, что  $\tilde{\Delta}$  есть система простых корней.  $\square$

**Задача 2.32.** Выведите из предыдущего предложения, что две несовпадающие камеры Вейля не пересекаются.

Имеет место следующее утверждение, значительно усиливающее результат леммы 2.29.

**Теорема 2.33.** 1. Если  $\lambda, \mu \in D$  и  $\omega\lambda = \mu$ , то  $\lambda = \mu$ , а  $\omega$  есть произведение простых отражений, каждое из которых оставляет  $\lambda$  неподвижным. В частности, если  $\lambda \in \text{Int } D$ , то стабилизатор  $W_\lambda$  тривиален. Таким образом, число камер Вейля равно порядку группы  $W$ .

2. Каждая орбита группы  $W$  пересекается с  $D$  ровно по одной точке (в таком случае говорят, что  $D$  является фундаментальной областью для действия группы  $W$  на пространстве  $V$ ).

Доказательство этой теоремы выходит за рамки этой брошюры. Его можно найти, например, в книге [8, 1.12] или в статье [6].

# Интермедия:

## группы отражений и кватернионы

And how The One of Time, of Space the  
Three, might in the Chain of Symbols girdled be.

*Sir William Rowan Hamilton*<sup>1</sup>

В предыдущих двух лекциях мы достаточно основательно изучили теорию групп отражений. Мы уже знаем, что таковыми являются действующая на плоскости группа диэдра, группы симметрий правильных многогранников в трехмерном пространстве и три серии групп  $A_n$ ,  $B_n$  и  $D_n$ , действующих в  $n$ -мерном пространстве при произвольном  $n$ .

В интермедии мы изучим три группы отражений в четырехмерном пространстве. Эти группы возникнут в результате одной весьма естественной конструкции. При этом две из них будут «новыми», т. е. не встречавшимися в сериях  $A_n$ ,  $B_n$  и  $D_n$ . Для этой конструкции нам потребуется рассмотреть четырехмерное пространство как пространство *кватернионов*.

### 2<sup>1</sup>/<sub>2</sub>.1. Двухлистное накрытие $\mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$

Отождествим четырехмерное пространство  $\mathbb{R}^4$  с пространством кватернионов  $\mathbb{H}$ , сопоставив вектору с координатами  $(a, b, c, d)$  кватернион  $z = a + bi + cj + dk$ . На пространстве кватернионов определено *сопряжение*:

$$z \mapsto \bar{z} = a - bi - cj - dk.$$

*Модулем* кватерниона называется действительное неотрицательное число

$$|z| = (z\bar{z})^{1/2} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}.$$

Тем самым, геометрически множество кватернионов с данным ненулевым модулем  $r$  — это трехмерная сфера  $S^3$  радиуса  $r$ .

---

<sup>1</sup>И как Одно от Времени и Три от Пространства могут быть опоясаны Цепью Символов. (Сэр Уильям Роуэн Гамильтон)

Нетрудно видеть, что, как и для комплексных чисел, для кватернионов верно равенство  $|z\omega| = |z| \cdot |\omega|$ . Таким образом, кватернионы, модуль которых равен 1, образуют группу по умножению. Будем обозначать эту группу через  $\text{Sp}(1)$ .

Группа  $\text{Sp}(1)$  действует на себе сопряжениями, которые сохраняют касательное пространство к трехмерной сфере в точке  $1 \in \text{Sp}(1) \cong S^3$ ; таким образом, каждый элемент из  $\text{Sp}(1)$  соответствует некоторому преобразованию этого пространства  $T_1 \text{Sp}(1)$ . Оказывается, это преобразование ортогонально. Таким образом, мы научились строить по каждому элементу из  $\text{Sp}(1)$  некоторое ортогональное преобразование трехмерного пространства. Обозначим это соответствие через  $\pi$ :

$$\pi: \text{Sp}(1) \rightarrow \text{SO}(3).$$

Можно показать, что  $\pi$  является сюръективным гомоморфизмом групп. При этом  $\pi$  является *двулистным накрытием*: прообраз каждого элемента из  $\text{SO}(3)$  содержит ровно два элемента из  $\text{Sp}(1)$  (это следует, например, из того, что существуют ровно два элемента из  $\text{Sp}(1)$ , действующие на  $T_1 \text{Sp}(1)$  тривиально: а именно,  $1$  и  $-1$ ). Более подробно эта конструкция описана, например, в брошюре [1].

## 2½.2. Конечные подгруппы в $\mathbb{H}$ суть системы корней

Нас будут интересовать конечные подгруппы в  $\mathbb{H}$ . Ясно, что если  $G$  — такая подгруппа, то  $G \subset \text{Sp}(1)$ . Оказывается, имеет место следующее неожиданное утверждение.

**Лемма 2½.1.** *Пусть  $G \subset \text{Sp}(1)$  — конечная подгруппа четного порядка. Тогда  $G$  является системой корней.*

**Доказательство.** По теореме Силова в группе четного порядка всегда найдется элемент порядка 2 (т. е. элемент, квадрат которого равен единице, и при этом сам он не равен единице). Единственный элемент порядка 2 в  $\mathbb{H}$  — это  $-1$  (проверьте это!). Следовательно,  $-1 \in G$ .

Поскольку  $G$  — группа, из этого следует, что если  $\lambda \in G$ , то и  $-\lambda \in G$ . Итак, для  $G$  выполнена аксиома (R1) системы корней.

Пусть  $\alpha \in G$ . Нетрудно убедиться, что отображение  $M_\alpha: \lambda \mapsto \alpha\lambda$  есть движение  $\mathbb{H}$ , переводящее  $1$  в  $\alpha$  и сохраняющее  $G$ . Также группу  $G$  сохраняет симметрия  $s_1(\lambda) = -\bar{\lambda}^{-1}$  (заметим, что  $\bar{\lambda} = -\lambda^{-1}$  для  $\lambda \in \text{Sp}(1)$ ). Поэтому для любого  $\alpha$  отражение  $s_\alpha = M_\alpha s_1 M_\alpha^{-1}$  сохраняет группу  $G$ .

Итак, аксиома (R2) также имеет место.  $\square$

**Упражнение 2½.2.** Убедитесь, что для любого  $\alpha \in \text{Sp}(1)$  имеет место формула  $s_\alpha(\lambda) = -\alpha\bar{\lambda}$ .

### 2½.3. Бинарные группы платоновых тел

Перейдем к обещанной конструкции групп отражений в четырехмерном пространстве.

Для начала рассмотрим группу  $\text{Sym}^+(T)$  вращений правильного тетраэдра в  $\mathbb{R}^3$ . Как мы знаем, она имеет порядок 12; она изоморфна  $\mathfrak{A}_4$  — группе четных перестановок множества вершин тетраэдра.

Группа  $\text{Sym}^+(T)$  является подгруппой в  $\text{SO}(3)$ . Возьмем ее полный прообраз  $\mathfrak{T} = \pi^{-1}(\text{Sym}^+(T)) \subset \text{Sp}(1) \subset \mathbb{H}$ . Он также является группой; ее порядок вдвое больше порядка группы  $\text{Sym}^+(T)$ , т. е. равен 24. Эта группа называется *бинарной группой тетраэдра*.

**Упражнение 2½.3.** Покажите, что

$$\mathfrak{T} \cong \left\{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k) \right\},$$

где знаки расставляются всевозможными способами (24 кватерниона из правой части равенства называются *единицами Гурвица*).

**Упражнение 2½.4.** Согласно лемме 2½.1  $\mathfrak{T}$  есть система корней. Покажите, что это система корней типа  $D_4$ .

Ту же самую конструкцию можно осуществить и для двух других групп симметрий платоновых тел — куба и икосаэдра.

Возьмем *бинарную группу куба*  $\mathfrak{C}$  — полный прообраз группы вращений куба  $\text{Sym}^+(C) \subset \text{SO}(3)$ . Она состоит из 48 кватернионов, 24 из которых суть единицы Гурвица, т. е.  $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{C}$ . Оставшиеся 24 элемента (обозначим их множество через  $\mathfrak{T}'$ ) имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm \omega),$$

где  $z, \omega \in \{1, i, j, k\}$  — различные базисные элементы (всего имеется 8 вариантов выбора такой пары).

Согласно той же лемме 2½.1 эти 48 элементов образуют систему корней. Рассмотрим соответствующую группу отражений  $W_{\mathfrak{C}}$ . Наша ближайшая задача состоит в вычислении порядка этой группы.

**Упражнение 2½.5. а)** Покажите, что  $s_{\alpha}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$ ,  $s_{\alpha}(\mathfrak{T}') = \mathfrak{T}'$  для произвольного  $\alpha \in \mathfrak{C}$ . Иначе говоря, отражения  $s_{\alpha}$  (а следовательно, вся группа  $W_{\mathfrak{C}}$ ) «не перемешивают» элементы из  $\mathfrak{T}$  и  $\mathfrak{T}'$ .

**б)** Покажите, что  $\mathfrak{C}$  состоит из двух орбит группы  $W_{\mathfrak{C}}$  по 24 элемента в каждой:  $\mathfrak{T}$  и  $\mathfrak{T}'$ .

**в)** Рассмотрим элемент  $1 \in \mathfrak{C}$ . Покажите, что его стабилизатор в  $W_{\mathfrak{C}}$  порожден отражениями относительно чисто мнимых кватернионов из  $\mathfrak{C}$ .

**г)** Покажите, что чисто мнимые кватернионы из  $\mathfrak{C}$  образуют систему корней типа  $B_3$ , а соответствующая ей группа отражений есть в точности стабилизатор единицы из предыдущего пункта.

Мы знаем, что порядок группы отражений типа  $B_3$  равен  $2^3 \cdot 3! = 48$ . Отсюда следует, что  $|W_{\mathcal{C}}| = 24 \cdot 48 = 1152$ .

Наконец, разберемся с *бинарной группой икосаэдра*. Эта 120-элементная группа есть полный прообраз группы вращений икосаэдра  $\text{Sym}^+(I)$ .

Обозначим через  $\varphi$  *золотое сечение*:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Упражнение 2½.6.** Убедитесь, что  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2}$ , а  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\varphi^{-1}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ . *Указание.* Рассмотрите «золотой треугольник» — равнобедренный треугольник с углом  $\pi/5$  при вершине.

Теперь возьмем кватернион  $\frac{1}{2}(\varphi + i + \varphi^{-1}j)$  и рассмотрим множество  $\mathcal{J}'$  кватернионов, которые получаются из него *четными* перестановками координат и всевозможными сменами знаков при координатах. Заметим, что все эти кватернионы имеют единичный модуль. Число элементов в  $\mathcal{J}'$  равно  $2^3 \cdot |\mathfrak{A}_4| = 8 \cdot 12 = 96$ . Теперь добавим к  $\mathcal{J}'$  множество единиц Гурвица  $\mathfrak{T}$ , которое нам уже встречалось выше, и обозначим полученное 120-элементное множество через  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}' \cup \mathfrak{T}.$$

**Задача 2½.7. а)** Покажите, что  $\mathcal{J}$  образует группу (а следовательно, по лемме 2½.1, и систему корней!).

**б)** Докажите, что факторгруппа группы  $\mathcal{J}$  по подгруппе  $\{\pm 1\}$  изоморфна группе четных перестановок  $\mathfrak{A}_5$ , т. е. группе вращений икосаэдра. Из этого следует, что группа  $\mathcal{J}$  изоморфна бинарной группе икосаэдра.

**в)** Пусть  $W_{\mathcal{J}}$  — группа отражений, соответствующая системе корней  $\mathcal{J}$ . Докажите, что она действует на  $\mathcal{J}$  транзитивно.

**г)** Докажите, что стабилизатор элемента  $1 \in \mathcal{J}$  порожден отражениями относительно 30 чисто мнимых кватернионов из  $\mathcal{J}$  и изоморфен группе симметрий икосаэдра  $\text{Sym} I$  (следовательно, он имеет порядок 120). Выведите отсюда, что порядок группы  $W_{\mathcal{J}}$  равен 14400.

**Задача 2½.8.** Выпишите какие-нибудь системы простых корней для систем корней  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{J}$ .

Ответ на эту задачу будет дан в конце следующей лекции.

## Лекция 3

Возьмем это самое слово «А-пять».  
Зачем мы его произносим,  
Когда мы могли бы спокойно сказать:  
«Е-шесть», и «Е-семь», и «Е-восемь»?  
*Почти что из Винни-Пуха*

### 3.1. Графы Кокстера: определение

Как мы видели в лекции 2, группа отражений  $W$  порождается отражениями  $s_1, \dots, s_r$  относительно простых корней  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Эти отражения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$s_i^2 = \text{Id}; \quad (s_i s_j)^{n_{ij}} = \text{Id}, \quad (1)$$

где число  $n_{ij}$  определяется углом между векторами  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$ :

$$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi/n_{ij}.$$

Оказывается, что других соотношений, не следующих из этих, в группе отражений нет. Это утверждает следующая теорема, которую мы доказывать не будем; заинтересованный читатель может найти ее доказательство в книге [8] или в статье [6].

**Теорема 3.1.** *Группа  $W$  есть факторгруппа свободной группы, порожденной элементами  $s_1, \dots, s_r$ , по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей левые части соотношений (1).*

Как мы видели ранее (см. упражнение 2.19), вся информация о системе корней и соответствующей группе  $W$  задается набором чисел  $n_{ij}$ , т. е. углами между простыми корнями. Эти данные можно наглядно представить следующим образом.

**Определение 3.2.** Пусть  $W$  — группа отражений,  $\Phi \supset \Delta$  — соответствующие система корней и система простых корней. *Графом Кокстера*, построенным по группе отражений  $W$  (или по системе корней  $\Phi$ ), называется неориентированный граф с  $|\Delta|$  вершинами (без кратных ребер и петель), ребра которого отмечены целыми числами, не меньшими трех, определенный по следующему правилу:

- $i$ -я и  $j$ -я вершины не соединены ребром, если  $n_{ij} = 2$  (т. е. простые корни  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  ортогональны, или, что то же самое, простые отражения  $s_i$  и  $s_j$  коммутируют);

- в противном случае  $i$ -я и  $j$ -я вершины соединены ребром, снабженным отметкой  $n_{ij}$ .

Условимся, что вместо ребра с отметкой 3 мы будем рисовать простое ребро без числовой отметки. Это соглашение связано с тем, что большинство ребер в графе Кокстера снабжены отметкой 3; оно позволяет упростить обозначения.

**Замечание.** Иногда вместо ребер с числовыми отметками используются кратные ребра. В таком случае вершины  $i$  и  $j$  соединяются ребром кратности  $n_{ij} - 2$  (что согласуется с нашими обозначениями при  $n_{ij} = 2$  и 3).

Поскольку все системы простых корней в данной системе корней  $\Phi$  сопряжены, граф Кокстера системы корней  $\Phi$  зависит только от самой системы корней и не зависит от выбора системы простых и положительных корней в  $\Phi$ .

**Упражнение 3.3.** Нарисуйте графы Кокстера для систем корней типа  $A$ ,  $B$  и  $D$  и для групп симметрий диэдра и трехмерных правильных многогранников.

Далеко не всякий граф с числовыми отметками на ребрах является графом Кокстера какой-либо группы отражений. С другой стороны, ясно, что если по графу может быть восстановлена группа отражений, то она восстанавливается единственным образом.

**Определение 3.4.** Граф Кокстера с  $n$  вершинами называется *допустимым*, если он соответствует некоторой конечной группе отражений.

Очевидно, что для допустимости графа Кокстера необходимо, чтобы существовала система из  $n$  векторов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  в  $\mathbb{R}^n$ , попарные углы между которыми равнялись бы

$$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi/n_{ij}.$$

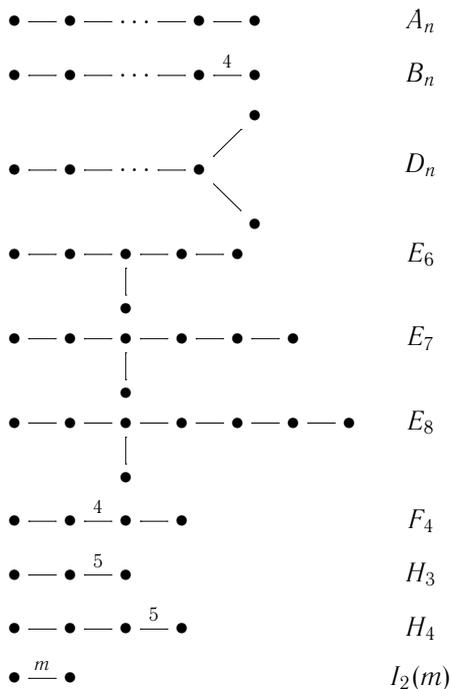
Основная цель этой лекции — получить список всех допустимых графов Кокстера. Это даст нам полную классификацию конечных групп отражений.

## 3.2. Классификация конечных групп отражений: формулировка результата

Ответ на интересующий нас вопрос формулируется следующим образом.

**Теорема 3.5.** *Граф Кокстера является допустимым тогда и только тогда, когда каждая из его компонент связности принад-*

лежит следующему списку:



В упражнении 3.3 утверждается, что определенные в лекции группы типов  $A_n$ ,  $B_n$  и  $D_n$  действительно соответствуют одноименным графам Кокстера из этой таблицы, а группа самосовмещений  $m$ -угольника на плоскости соответствует графу  $I_2(m)$ .

### 3.3. Доказательство теоремы 3.5: инструментарий

Нетрудно видеть, что можно ограничиться рассмотрением связных графов Кокстера: если граф несвязен, то соответствующая группа отражений (если она существует) распадается в прямое произведение нескольких подгрупп отражений, каждая из которых соответствует связной компоненте графа Кокстера (соответственно, система корней распадается в несколько ортогональных подсистем). Поэтому достаточно описать все связные допустимые графы Кокстера. Группы отражений и их системы корней, соответствующие связным графам Кокстера, будем называть *неразложимыми*.

Общая стратегия нашего доказательства будет такова: мы выясним, каких подграфов не может быть в допустимом графе. В итоге мы придем к тому, что все графы, не содержащие этих запрещенных подграфов, суть в точности графы из теоремы 3.5. После этого нам останется лишь предъявить примеры групп отражений, соответствующих этим графам.

Для заданного графа Кокстера  $\Gamma$  будем искать описанную в определении 3.4 систему, состоящую из единичных векторов. Нам известна матрица Грама

$$G(\Gamma) = G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = ((\alpha_i, \alpha_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

этой системы: на ее диагонали стоят единицы, а вне диагонали — неположительные числа  $\cos(\pi - \pi/n_{ij}) = -\cos(\pi/n_{ij})$ . Если два вектора  $\beta$  и  $\gamma$  разложены по базису из  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ :  $\beta = \sum b_i \alpha_i$ ,  $\gamma = \sum c_i \alpha_i$ , то их скалярное произведение равно

$$(\beta, \gamma) = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n) (G(\Gamma)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама системы векторов в пространстве должна быть положительно определена. Это дает нам весьма сильные ограничения на значения  $n_{ij}$  (т. е. на граф Кокстера), которые позволяют исключить некоторые графы. Для их исключения мы будем пользоваться тремя основными инструментами.

**Положительность определителя матрицы Грама:**  $\det G(\Gamma) > 0$ .

**Неравенство Коши—Буняковского:**  $(\lambda, \mu)^2 < (\lambda, \lambda)(\mu, \mu)$  для любых двух не пропорциональных друг другу векторов  $\lambda, \mu$ .

**Теорема Пифагора:** пусть  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  — ортонормированная система векторов (не обязательно базис). Тогда для произвольного вектора  $\lambda$  выполняется неравенство

$$(\lambda, \lambda) \geq \sum_{i=1}^k (\lambda, \varepsilon_i)^2,$$

причем оно является строгим тогда и только тогда, когда  $\lambda \notin \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \rangle$ .

### 3.4. Доказательство теоремы 3.5: необходимость

В этом разделе мы в десять шагов исключим некоторые недопустимые графы Кокстера. В результате останутся только те, которые перечислены в теореме 3.5. Тем самым в теореме будет доказана часть «только тогда».

**Шаг 1.** Пусть  $\Gamma$  — допустимый граф Кокстера и граф  $\Gamma'$  получается из  $\Gamma$  удалением некоторых вершин и всех примыкающих к ним ребер. Тогда граф  $\Gamma'$  допустим.

Это очевидно из геометрических соображений.

**Шаг 2.** Допустимый граф Кокстера не содержит циклов.

**Доказательство.** Рассмотрим вектор  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  и найдем его скалярный квадрат:

$$(\alpha, \alpha) = \left( \sum \alpha_i, \sum \alpha_i \right) = n - 2 \sum_{i < j} \cos(\pi/n_{ij}) \geq n - \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{ребрам}}} 1 > 0.$$

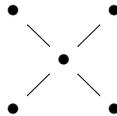
Следовательно, число ребер не превосходит  $n - 1$ . □

**Шаг 3.** Допустимый граф Кокстера не может содержать:

- а) вершину степени не меньше 4;
- б) вершину степени 3, из которой исходит ребро с отметкой не меньше 4;
- в) вершину, из которой исходят два ребра с отметками не меньше 4.

**Доказательство.** В силу шага 1 достаточно проверить, что ни один из трех минимальных графов, удовлетворяющих условиям а)–в), не является допустимым. Действительно, пусть исходный граф  $\Gamma$  содержит какой-либо такой подграф. Удалим все вершины, кроме входящих в этот подграф, и все исходящие из них ребра. Полученный граф либо содержит цикл (следовательно, недопустим в силу шага 2), либо имеет вид, описанный в условии.

Докажем, что граф



(возможно, с отметками на ребрах) не является допустимым. Обозначим векторы, соответствующие центральной и крайним вершинам, через  $\alpha$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  соответственно. Последние четыре вектора образуют ортонормированную систему, а  $\alpha$  не принадлежит их линейной оболочке.

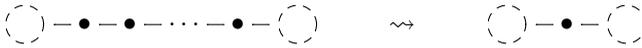
Значит,

$$1 = (\alpha, \alpha) > \sum_{i=1}^4 (\alpha, \alpha_i)^2 \geq \sum_{i=1}^4 (1/2)^2 = 1.$$

Противоречие. □

**Упражнение 3.6.** Разберитесь самостоятельно с п. б) и в).

**Шаг 4.** Если в допустимом графе  $\Gamma$  имеется цепочка вершин, соединенных между собой простыми ребрами, причем никакие вершины, кроме первой и последней, более ни с чем не соединены, то эту цепочку можно «стянуть», заменив ее одной вершиной и оставив все остальные ребра и вершины без изменений. Полученный в результате граф  $\tilde{\Gamma}$  также будет допустимым:



**Доказательство.** Предъявим для графа  $\tilde{\Gamma}$  набор векторов с заданными скалярными произведениями. Этот набор получается из набора для  $\Gamma$  при помощи замены векторов  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , соответствующих вершинам, которые образуют цепочку, на их сумму  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ . Действительно,

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{1 \leq i \leq k} (\alpha_i, \alpha_i) - 2 \sum_{1 \leq i \leq k-1} (\alpha_i, \alpha_{i+1}) = k - (k-1) = 1,$$

а для всякого вектора  $\beta$ , соответствующего вершине не из цепочки,

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta) \quad \text{либо} \quad (\alpha, \beta) = (\alpha_k, \beta),$$

что и требовалось. □

**Определение 3.7.** *Особенностью* графа будем называть либо вершину степени выше 2, либо кратное ребро (т. е. ребро с отметкой не меньше 4).

**Шаг 5.** Допустимый граф содержит не более одной особенности.

**Доказательство.** Это следует из предыдущих двух шагов: если особенностей более одной, то рассмотрим цепочку, соединяющую две ближайшие особенности, и стянем ее; полученный граф будет недопустимым в силу шага 3. □

Дальнейшие четыре шага посвящены исключению некоторых подграфов с кратным ребром.

**Шаг 6.** Граф  $\bullet - \bullet \overset{m}{\bullet} - \bullet$  не является допустимым при  $m \geq 5$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть вершинам, занумерованным слева направо, соответствуют векторы  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ . Рассмотрим векторы  $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$ ,  $\gamma = 2\alpha_3 + \alpha_4$ . Легко убедиться, что

$(\beta, \beta) = (\gamma, \gamma) = 3$ , а  $(\beta, \gamma) = -4 \cos \frac{\pi}{m}$ . Но  $\cos \frac{\pi}{m} \geq \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .  
Запишем неравенство Коши—Буняковского:

$$9 = 3 \cdot 3 = (\beta, \beta)(\gamma, \gamma) > (\beta, \gamma)^2 \geq (1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5} > 9.$$

Противоречие. □

**Шаг 7.** Граф  $\bullet - \bullet \overset{4}{\bullet} - \bullet - \bullet$  не является допустимым.

**Шаг 8.** Граф  $\bullet \overset{5}{\bullet} - \bullet - \bullet - \bullet$  не является допустимым.

**Шаг 9.** Граф  $\bullet \overset{m}{\bullet} - \bullet$  не является допустимым при  $m \geq 6$ .

**Упражнение 3.8.** Пользуясь инструментарием из предыдущего пункта, докажите эти три утверждения.

Мы получили, что если граф не содержит вершину степени 3, то он является одним из следующих:  $A_n, B_n, F_4, H_3, H_4, I_2(m)$ .

Теперь разберем случай, когда в графе Кокстера есть вершина степени 3:



**Шаг 10.** Граф Кокстера с вершиной степени 3, состоящий из трех «щупалец», длины которых равны  $p - 1$ ,  $q - 1$  и  $r - 1$  соответственно, является допустимым только тогда, когда для длин «щупалец» выполнено соотношение

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \quad (2)$$

**Задача 3.9.** Докажите это.

**Указание.** Пусть векторы  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha'_1, \dots, \alpha'_q, \alpha''_1, \dots, \alpha''_r$  соответствуют вершинам, образующим «щупальца» и занумерованным от краев к центру так, что  $\alpha_p = \alpha'_q = \alpha''_r$ . Рассмотрите ортогональные векторы

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (p-1)\alpha_{p-1}, \\ \alpha'_1 + 2\alpha'_2 + \dots + (q-1)\alpha'_{q-1} \quad \text{и} \\ \alpha''_1 + 2\alpha''_2 + \dots + (r-1)\alpha''_{r-1}. \end{aligned}$$

Вектор  $\alpha_p = \alpha'_q = \alpha''_r$  не лежит в их линейной оболочке. Теперь воспользуйтесь теоремой Пифагора.

Несложно перечислить все решения уравнения (2) в целых числах, больших единицы:  $(p, q, r)$  может быть равно  $(2, 2, r)$  при произвольном  $r \geq 2$ , а также  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  и  $(2, 3, 5)$ . Первая серия решений дает нам графы Кокстера типа  $D_n$ , а последние три — графы  $E_6, E_7$  и  $E_8$ .

### 3.5. Доказательство теоремы 3.5: достаточность

Последнее, что от нас требуется — это выписать системы корней и простых корней для всех допустимых графов Кокстера. Этому посвящен настоящий раздел.

Системы корней, соответствующие сериям  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_n$  и  $I_2(m)$ , мы уже видели в п. 2.2. Осталось разобраться с системами корней, которые соответствуют графам  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $H_3$  и  $H_4$ . Оказывается, последние три системы корней нам уже встречались в интермедии.

**Предложение 3.10.** 1. *Бинарная группа куба  $\mathfrak{C} \subset \mathbb{H}$  есть система корней типа  $F_4$ .*

2. *Бинарная группа икосаэдра  $\mathfrak{I} \subset \mathbb{H}$  есть система корней типа  $H_4$ .*

3. *Пусть  $\mathfrak{I}^{\text{Im}}$  есть множество чисто мнимых кватернионов из  $\mathfrak{I}$ . Оно образует систему корней типа  $H_3$ .*

**Доказательство.** Предъявим системы простых корней для указанных систем корней. Проверка того, что эти наборы векторов действительно суть системы простых корней, а также что углы между ними такие, как предписано графом Кокстера, останется читателю в качестве несложного упражнения.

Итак, для системы корней  $\mathfrak{C}$  имеем

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j - k), \quad \alpha_3 = k, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

А вот система простых корней для системы корней  $\mathfrak{I}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(\varphi^{-1} - \varphi j - k), & \alpha_2 &= \frac{1}{2}(-\varphi i + \varphi^{-1} j + k), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}(\varphi^{-1} i + j - \varphi k), & \alpha_4 &= \frac{1}{2}(\varphi^{-1} i - j + \varphi k). \end{aligned}$$

При этом корни  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  образуют систему простых корней для системы корней  $\mathfrak{I}^{\text{Im}}$ . Следовательно, последняя является системой корней типа  $H_3$ . Можно показать, что соответствующая группа отражений есть группа симметрий икосаэдра  $\text{Sym} I$ .  $\square$

Теперь осталось убедиться в существовании систем корней типа  $E_6$ ,  $E_7$  и  $E_8$ . В силу шага 1 из предыдущего пункта, достаточно предъявить систему корней типа  $E_8$ ; остальные две системы  $E_6$  и  $E_7$  будут в ней содержаться.

В принципе, эту систему корней и систему простых корней можно было бы выписать явно и на этом остановиться — проверка покажет, что предъявленный набор действительно является нужной нам системой корней (с данной диаграммой). Однако мы хотели бы мотивировать это

предъявление, показав, откуда появляется эта система корней, и попутно упомянуть о еще одной задаче, где возникают группы отражений.

Как мы уже упомянули в начале этой брошюры, графы Кокстера — в той или иной своей инкарнации — возникают во многих задачах. В частности, их ближайшие родственники, *схемы Дынкина*, появляются в задаче классификации так называемых *кристаллографических групп*. Мы не будем здесь вдаваться ни в детали сходства и различия между этими родственниками (скажем лишь, например, что графу Кокстера  $B_n$  соответствуют две схемы Дынкина  $B_n$  и  $C_n$ , что объясняет, почему после  $B$  у нас идет  $D$ ), ни в теорию кристаллографических групп — ибо для этого объем брошюры пришлось бы существенно увеличить. Прочитать об этом можно, например, в гл. 2 книги [8]; мы же скажем лишь, что кристаллографические группы связаны с изучением некоторых решеток в  $\mathbb{R}^n$ . Соответствующие системы корней при этом оказываются приходящими из «коротких» векторов этих решеток.

Для построения системы корней типа  $E_8$  мы как раз построим некоторую решетку в восьмимерном пространстве и рассмотрим в ней множество всех векторов минимальной положительной длины. Оно будет образовывать нужную нам систему корней.

Пусть  $e_1, \dots, e_8$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^8$ . Начнем с решетки  $L'$ , состоящей из всех векторов  $\sum c_i e_i$ , для которых  $c_i \in \mathbb{Z}$  и сумма всех коэффициентов  $\sum_{i=1}^8 c_i$  четна. Теперь рассмотрим минимальную решетку, содержащую  $L'$  и вектор  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i$ :

$$L = L' + \mathbb{Z} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i \right).$$

Заметим, что квадрат длины любого вектора в этой решетке четен (проверьте это!). Обозначим через  $\Phi$  множество векторов, квадрат длины которых минимален, т. е. равен 2. Множество  $\Phi$  состоит из 240 векторов:

$$\pm e_i \pm e_j \quad (i < j) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i \quad (\text{число знаков «+» четно}).$$

**Упражнение 3.11.** Докажите, что  $\Phi$  является системой корней.

В качестве системы простых корней в  $\Phi$  возьмем следующий набор:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$

$$\alpha_2 = e_1 + e_2,$$

$$\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2} \quad (3 \leq i \leq 8).$$

**Упражнение 3.12.** Проверьте, что это действительно система простых корней в  $\Phi$ , соответствующая графу Кокстера  $E_8$ . Убедитесь также, что первые шесть и первые семь из перечисленных векторов  $\alpha_i$  порождают системы корней типа  $E_6$  и  $E_7$  соответственно.

Итак, для каждого графа Кокстера из списка в теореме 3.5 мы предъявили соответствующую систему корней. Это дает нам полную классификацию конечных групп отражений. Теорема 3.5 доказана полностью.  $\square$

## Лекция 4

Город расположен четверугольником, и длина его такая же, как и ширина. И измерил он город тростью на двенадцать тысяч стадий; длина и ширина и высота его равны.

*Откровение Иоанна Богослова, 21:16*

В этой лекции мы достигнем цели, заявленной в самом начале брошюры: мы дадим определение правильного многогранника в  $n$ -мерном пространстве, после чего опишем все правильные многогранники. Это будет сделано следующим образом. Сначала мы покажем, что группа симметрий правильного многогранника есть группа отражений. Более того, эта группа обязана удовлетворять следующему дополнительному условию: ее граф Кокстера *линеен*, т. е. не содержит вершин степени 3. Далее мы выясним, что этой группе можно восстановить сам правильный многогранник, причем не более чем двумя способами. При этом два многогранника с одной и той же группой симметрий будут двойственными друг к другу. Наконец, мы найдем количество граней каждой размерности у каждого из полученных многогранников.

### 4.1. Правильные многогранники и их группы симметрий

В лекции 1 мы рассмотрели группы симметрий правильных многогранников в трехмерном пространстве и убедились, что они обладают следующим свойством: группа симметрий  $\text{Sym } M$  правильного многогранника  $M$  действует транзитивно на флагах — наборах из примыкающих друг к другу вершины, ребра и грани многогранника  $M$ . Понятие флага очевидным образом переносится на многогранники произвольной размерности.

**Определение 4.1.** Пусть  $M$  — многогранник в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n-1}$  — множества его 0-мерных граней (вершин), одномерных граней (ребер),  $\dots$ , граней размерности  $n - 1$  (гиперграней). Последовательность граней  $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ , где  $F_i \in \mathcal{F}_i$ , а  $F_n = M$ , называется *флагом*, если  $F_i \subset F_{i+1}$  при всех  $i$  от 0 до  $n - 1$ .

После этого указанное свойство групп симметрий можно принять в качестве определения правильного многогранника.

**Определение 4.2.** Многогранник  $M$  называется *правильным*, если действие  $\text{Sym } M$  на флагах транзитивно, т. е. любой флаг можно перевести в любой другой.

Пусть  $M$  — правильный многогранник в  $n$ -мерном пространстве. Рассмотрим какую-нибудь его грань  $F$ . По определению она тоже является правильным многогранником, и ее симметрии суть в точности симметрии многогранника  $M$ , оставляющие грань  $F$  на месте.

**Замечание.** Если симметрия грани  $F$  является отражением (как преобразование плоскости, содержащей  $F$ ), то она продолжается до отражения всего пространства, содержащего многогранник  $M$ .

**Теорема 4.3.** *Группа  $\text{Sym } M$  порождается  $n$  отражениями.*

**Доказательство.** Докажем это утверждение индукцией по размерности многогранника. База индукции очевидна: при  $n = 1$  единственный правильный многогранник — это отрезок, его группа симметрий порождается одним отражением.

Пусть  $M$  — многогранник размерности  $n$ . Рассмотрим две его гиперграницы  $F$  и  $F'$ , пересекающиеся по грани  $E$  размерности  $n - 2$ . Достаточно доказать, что  $\text{Sym } M$  порождается подгруппой  $\text{Sym } F$  и отражением  $s$  относительно грани  $E$  (точнее, относительно гиперплоскости, проходящей через  $E$  и через центр многогранника). Обозначим через  $\Gamma$  группу, порожденную отражением  $s$  и  $\text{Sym } F$ , и будем доказывать, что  $\Gamma = \text{Sym } M$ .

Сначала докажем, что  $\Gamma$  содержит отражение относительно любой грани  $E'$  размерности  $n - 2$ , принадлежащей  $F$  (обозначим это отражение через  $s'$ ). Действительно, в силу транзитивности действия  $\text{Sym } F$  на гранях данной размерности существует преобразование  $g \in \text{Sym } F$ , переводящее  $E$  в  $E'$ . Тогда отражение  $s'$  записывается как результат сопряжения отражения  $s$  при помощи элемента  $g$ :

$$s' = g \circ s \circ g^{-1},$$

следовательно,  $s' \in \Gamma$ .

Теперь докажем, что  $\Gamma$  содержит все преобразования, переводящие грань  $F'$  в себя. Действительно, они все имеют вид

$$g' = s \circ g \circ s,$$

где  $g \in \text{Sym } F'$  (последний множитель можно не обращать, так как  $s^{-1} = s$ ). Выбирая в качестве  $g$  всевозможные симметрии грани  $F$ , мы будем получать в качестве  $g'$  всевозможные симметрии грани  $F'$ . Следовательно,  $\text{Sym } F' \subset \Gamma$ .

Те же самые рассуждения можно провести, заменив  $F$  на  $F'$ , а  $F'$  на произвольную грань, смежную с  $F'$ , и т. д. В итоге получим, что  $\Gamma$

содержит все симметрии всех гиперграней нашего многогранника и все симметрии относительно его граней размерности  $n - 2$ .

Теперь рассмотрим произвольное преобразование  $g \in \text{Sym } M$  и некоторую гипергрань  $F$  многогранника  $M$ . Мы уже знаем, что имеется композиция отражений относительно граней размерности  $n - 2$ , переводящая  $F$  в  $g(F)$ . Обозначим ее через  $\omega$ ; согласно доказанному,  $\omega \in \Gamma$ . Композиция  $h = \omega^{-1} \circ g$  переводит гипергрань  $F$  в себя, поэтому  $h \in \text{Sym } F \subset \Gamma$ . Следовательно,  $g = \omega \circ h \in \Gamma$ . Значит,  $\Gamma = \text{Sym } M$ , что и требовалось.  $\square$

## 4.2. Образующие группы $\text{Sym } M$ и соотношения между ними

Предыдущая теорема (вернее, ее доказательство) дает нам возможность предъявить образующие группы  $\text{Sym } M$  в явном виде. Для этого фиксируем произвольный флаг  $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ . Пусть  $c_0, c_1, \dots, c_n$  — центры этих граней (в частности,  $c_0 = F_0$ , а  $c_n$  совпадает с центром масс всего многогранника). Для каждого  $i \in [1, n]$  обозначим через  $H_i$  гиперплоскость, проходящую через все эти точки, кроме  $c_{i-1}$  (такой сдвиг нумерации вызван тем, что мы хотим нумеровать гиперплоскости числами от 1 до  $n$ , а не от 0 до  $n - 1$ ). Рассмотрим набор отражений  $s_i$  относительно этих гиперплоскостей.

Из нашего построения следует, что каждая плоскость  $H_i$  содержит все грани  $F_j$  при  $j \leq i - 2$  и перпендикулярна всем граням  $F_l$  при  $l \geq i$ . Если ограничить отражение  $s_i$  на  $i$ -мерное подпространство, содержащее грань  $F_i$ , то в нем оно действует как отражение относительно грани  $F_{i-2}$ . Мы получили следующий результат.

**Следствие 4.4** (из доказательства теоремы 4.3). *Описанные выше отражения  $s_1, \dots, s_n$  порождают группу  $\text{Sym } M$ .*

Теперь выясним, каким соотношениям удовлетворяют эти образующие.

**Определение 4.5.** Пусть  $(F_0, \dots, F_n)$  — некоторый флаг правильного многогранника  $M$  и  $1 \leq k \leq n - 1$ . Число  $k$ -мерных граней, содержащихся в  $F_{k+1}$  и содержащих  $F_{k-2}$ , обозначим через  $p_k$ . (При этом мы формально полагаем  $F_{-1} = \emptyset$ ). Число  $(k - 1)$ -мерных граней, заключенных между  $F_{k+1}$  и  $F_{k-2}$ , также равно  $p_k$  (почему?). Набор  $(p_1, \dots, p_{n-1})$  называется *символом Шлефли* многогранника  $M$ .

Очевидно, что данное определение не зависит от выбора флага.

**Пример 4.6.** Символ Шлефли куба равен  $(4, 3)$ . Действительно,  $p_1 = 4$ , так как каждая грань содержит четыре ребра и четыре вершины;  $p_2 = 3$ , поскольку каждая вершина содержится ровно в трех ребрах и трех гранях. Убедитесь сами, что символы Шлефли тетраэдра, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра равны  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$  и  $(5, 3)$  соответственно.

**Предложение 4.7.** Пусть  $s_1, \dots, s_n$  — система образующих группы  $\text{Sym } M$ , построенная в начале этого пункта. Тогда

1)  $s_i s_j = s_j s_i$  при  $|i - j| > 1$ ;

2) порядок элемента  $s_i s_{i+1}$  равен  $p_i$ , где  $(p_1, \dots, p_{n-1})$  — символ Шлефли многогранника  $M$ .

**Доказательство.** 1) Докажем, что гиперплоскости отражений  $s_i$  и  $s_j$  перпендикулярны. Пусть  $k$  таково, что  $i < k < j$ . Тогда гиперплоскость  $H_i$  перпендикулярна грани  $F_{k-1}$ , а гиперплоскость  $H_j$  содержит грань  $F_{k-1}$ . Значит, гиперплоскости  $H_i$  и  $H_j$  перпендикулярны.

2) Композиция отражений  $s_i$  и  $s_{i+1}$  является поворотом вокруг  $(i - 2)$ -мерной грани  $F_{i-2}$  на угол  $2\pi/m$ , где  $m$  — количество  $i$ -мерных (или  $(i - 1)$ -мерных) граней, сходящихся в  $F_{i-2}$ , т. е.  $m = p_i$ . Значит, порядок элемента  $s_i s_{i+1}$  действительно равен  $p_i$ . Заметим, в частности, что отражения с соседними номерами не коммутируют, так как  $p_i \geq 3$ .  $\square$

Возникает естественная гипотеза:  $\text{Sym } M$  есть группа отражений, соответствующая графу Кокстера с  $n$  вершинами, в котором между каждыми двумя последовательными вершинами с номерами  $i$  и  $i + 1$  имеется ребро с отметкой  $p_i$ , а никакие другие вершины между собой не соединены. Мы докажем, что это действительно так. Для этого нам нужно показать, что построенные  $s_i$  являются *простыми* отражениями.

### 4.3. Система корней группы $\text{Sym } M$

Возьмем произвольный флаг  $(F'_0, F'_1, \dots, F'_n)$  многогранника  $M$  и зафиксируем центры его граней  $c'_i$ . Для каждого  $i \in [1, n]$  возьмем гиперплоскость, проходящую через все  $c'_j$ , кроме  $c'_{i-1}$ . Теперь рассмотрим вектор  $\alpha$  единичной длины, перпендикулярный этой гиперплоскости и направленный в полупространство, содержащее пропущенный центр грани  $c'_{i-1}$ . Обозначим множество всех таких векторов, полученных при всевозможных выборах флагов и номеров пропущенных граней  $i$ , через  $\Phi$ .

**Лемма 4.8.** 1. Множество  $\Phi$  является системой корней, т. е. удовлетворяет обеим аксиомам из определения 2.2.

2. Группа отражений  $W$ , построенная по системе корней  $\Phi$ , совпадает с группой  $\text{Sym } M$ .

**Доказательство.**

**Задача 4.9.** Докажите п. 1 самостоятельно.

2. Группа  $W$  порождена отражениями  $s_\alpha$  при всех  $\alpha \in \Phi$ . Из предыдущего пункта мы знаем, что построенная так система образующих  $s_1, \dots, s_n$  группы  $\text{Sym } M$  лежит в  $W$ ; значит,  $\text{Sym } M \subset W$ . С другой сто-

роны, любое из рассматриваемых отражений сохраняет многогранник  $M$ , поэтому  $W \subset \text{Sym } M$ .  $\square$

Пусть, как и прежде,  $c_i$  — центры граней нашего фиксированного флага  $(F_0, \dots, F_n)$ . Обозначим через  $\beta_i$  единичный вектор, перпендикулярный гиперплоскости, проходящей через все  $c_j$  при  $j \neq i - 1$  и лежащий в том же полупространстве, что и  $c_{i-1}$ .

**Лемма 4.10.**  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  есть система простых корней для системы корней  $\Phi$ .

**Доказательство.** Пусть  $H_i^+$  — полупространство, ограниченное гиперплоскостью  $H_i$  и содержащее вектор  $\beta_i$  (или, что то же самое, точку  $c_{i-1}$ ). Рассмотрим *фундаментальный конус*

$$D = \bigcap_{i=1}^n H_i^+.$$

По определению  $D$  есть конус, двойственный к конусу, порожденному векторами  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Можно убедиться (проверьте это!), что  $\text{Int } D$  не пересекается ни с какой из гиперплоскостей  $H_\alpha$  при произвольном  $\alpha \in \Phi$ . Тогда утверждение леммы следует из п. 1 предложения 2.31.  $\square$

**Упражнение 4.11.** Докажите, что  $D$  является фундаментальной областью для группы  $\text{Sym } M$ .

Итак, мы доказали теорему о классификации групп симметрий правильных многогранников, заявленную в начале этого пункта.

**Теорема 4.12.** *Группа симметрий  $\text{Sym } M$  правильного многогранника  $M$  является группой отражений. Ее граф Кокстера линейен (т. е. не содержит вершин степени 3) и связан. Числовая отметка на ребре графа Кокстера, соединяющем вершины  $i$  и  $i + 1$ , равна  $p_i$ , где  $(p_1, \dots, p_{n-1})$  — символ Шлефли многогранника  $M$ .*

Все возможные группы симметрий правильных многогранников представлены в следующей таблице.

Тип	Граф Кокстера	$ \text{Sym } M $
$A_n$	$\bullet - \bullet - \dots - \bullet - \bullet$	$(n + 1)!$
$B_n$	$\bullet - \bullet - \dots - \bullet - \overset{4}{\bullet}$	$2^n \cdot n!$
$F_4$	$\bullet - \bullet - \overset{4}{\bullet} - \bullet$	$1152 = 2^7 \cdot 3^2$
$H_3$	$\bullet - \bullet - \overset{5}{\bullet}$	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$H_4$	$\bullet - \bullet - \bullet - \overset{5}{\bullet}$	$14400 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
$I_2(m)$	$\bullet - \overset{m}{\bullet}$	$2m$

#### 4.4. Построение правильного многогранника по его группе симметрий

В предыдущей части этой лекции мы решали следующую задачу: как описать группу симметрий  $\text{Sym } M$  для заданного правильного многогранника  $M$ ? Сейчас мы займемся обратной задачей, а именно, будем восстанавливать правильный многогранник по его группе симметрий.

Пусть  $M$  — правильный многогранник,  $(F_0, \dots, F_n)$  — некоторый его флаг. По этим данным мы построили фундаментальный конус  $D$  многогранника  $M$  и доказали, что он является замыканием некоторой камеры Вейля группы  $\text{Sym } M$ . При этом  $M$  однозначно определяется точками  $c_0, \dots, c_{n-1}$ , лежащими на ребрах конуса  $D$ , — эти точки являются центрами граней  $F_i$  выбранного флага. Тем самым ребра фундаментального конуса оказываются пронумерованными. Далее, гипергрань  $F_{n-1}$  проходит через все точки  $c_0, \dots, c_{n-1}$  и перпендикулярна прямой  $c_{n-1}c_n$ . Таким образом, по фундаментальному конусу  $D$  с пронумерованными ребрами многогранник  $M$  восстанавливается однозначно с точностью до подобия (отвечающего выбору точки  $c_{n-1}$  на соответствующем ребре).

Точка  $c_{n-1}$  выбирается на ребре фундаментального конуса, отвечающем *висячей вершине* графа Кокстера. Таких вершин две. Поэтому при задании правильного многогранника графом Кокстера существенную роль играет его ориентация — указание того, какая висячая вершина отвечает первому отражению  $s_1$ , а какая — последнему  $s_n$ .

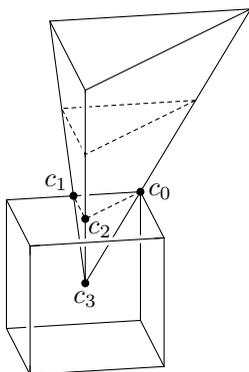


Рис. 7. Восстановление куба по его фундаментальному конусу

**Определение 4.13.** Линейный связный граф Кокстера, в котором одна из висячих вершин объявлена началом, а другая — концом, называется *ориентированным*.

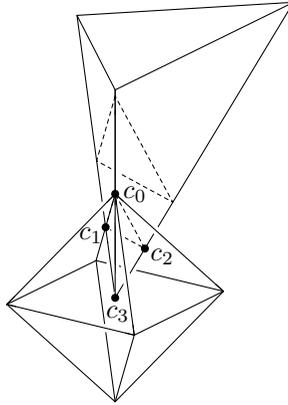


Рис. 8. Восстановление октаэдра по его фундаментальному конусу

**Теорема 4.14.** *Каждый ориентированный линейный связный граф Кокстера соответствует ровно одному правильному многограннику (с точностью до подобия). Символ Шлефли этого многогранника равен последовательности отметок на ребрах данного графа Кокстера, прочитанной начиная с начальной вершины.*

**Доказательство.** *Существование.* Рассмотрим систему корней  $\Phi$ , соответствующую заданному графу Кокстера. Пусть  $W$  — соответствующая группа отражений,  $\beta_1, \dots, \beta_n$  — система простых корней в  $\Phi$ ,  $D$  — конус, двойственный к конусу, порожденному простыми корнями. Рассмотрим ребро  $r$  конуса  $D$ , полученное как пересечение всех гиперплоскостей  $H_i$  отражений относительно  $\beta_i$  при  $1 \leq i \leq n - 1$  (т. е. гиперплоскостей всех простых отражений, кроме последнего). Пусть  $\Pi$  — гиперплоскость, перпендикулярная этому ребру, а  $\Pi^-$  — полупространство с границей  $\Pi$ , содержащее вершину конуса  $D$ . Возьмем все полупространства, получаемые из  $\Pi^-$  действием элементов из  $W$ , и рассмотрим множество

$$M = \bigcap_{\omega \in W} \omega \cdot \Pi^-.$$

Это многогранник, группой симметрий которого является  $W$ . Теперь осталось убедиться, что  $W$  транзитивно действует на флагах многогранника  $M$ . Это напрямую следует из равенства

$$M = W \cdot (\Pi^- \cap D).$$

**Упражнение 4.15.** Докажите это равенство.

**Указание.** Воспользуйтесь леммой 2.29.

Утверждение о символе Шлефли следует из конструкции системы образующих группы  $W$ , описанной в п. 4.2.

Единственность. Как мы видели выше,  $M = W \cdot C$ , где  $C$  — симплекс, полученный в результате пересечения фундаментального конуса  $D$  с полупространством  $\Pi^-$ , перпендикулярным его заданному ребру. Ясно, что все такие симплексы подобны, следовательно, подобны и получаемые из них многогранники.  $\square$

При изменении ориентации графа Кокстера многогранник переходит в двойственный. Таким образом, несимметричные линейные связные графы Кокстера  $(B_n, H_3, H_4)$  соответствуют парам двойственных многогранников, а симметричные  $(A_n, F_4, I_2(m))$  — самодвойственным многогранникам.

Итак, мы получили полную классификацию правильных многогранников. Ее можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 4.16.** *В пространстве произвольной размерности существуют три правильных многогранника, символы Шлефли которых равны  $(3, \dots, 3)$ ,  $(4, 3, \dots, 3)$  и  $(3, \dots, 3, 4)$  соответственно (их мы будем называть регулярными). Кроме того, в малых размерностях имеются следующие исключительные многогранники.*

*Случай  $n = 2$ : правильный  $m$ -угольник, соответствующий символу Шлефли  $(m)$ , с группой симметрий типа  $I_2(m)$ .*

*Случай  $n = 3$ : правильные додекаэдр и икосаэдр, соответствующие символам Шлефли  $(5, 3)$  и  $(3, 5)$ ; их группа симметрий имеет тип  $H_3$ .*

*Случай  $n = 4$ : один самодвойственный многогранник с символом Шлефли  $(3, 4, 3)$  и группой симметрий типа  $F_4$  и два двойственных многогранника с символами Шлефли  $(5, 3, 3)$  и  $(3, 3, 5)$  и группой симметрий типа  $H_4$ .*

Построим явно три регулярных правильных многогранника в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 4.17.** 1. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^{n+1}$  набор из  $n + 1$  точки с координатами  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (одна координата равна единице, остальные — нули). Выпуклая оболочка этих точек есть  $n$ -мерный многогранник, лежащий в плоскости  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ . Этот многогранник называется  $n$ -мерным симплексом.

2. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  набор из  $2^n$  точек с координатами  $(\pm 1, \dots, \pm 1)$  при всевозможных выборах знаков. Выпуклая оболочка этих точек называется  $n$ -мерным кубом.

3. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  набор из  $2n$  точек вида  $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ . Их выпуклая оболочка называется  $n$ -мерным кокубом.

**Задача 4.18.** Докажите, что симплекс, куб и кокуб — регулярные правильные многогранники, перечисленные в теореме 4.16.

## 4.5. Подсчет числа граней у правильных многогранников

Итак, мы перечислили все правильные многогранники. В этом пункте мы вычислим количество граней каждой размерности у каждого из них. Для удобства введем следующее обозначение.

**Определение 4.19.** Назовем  $f$ -вектором  $n$ -мерного многогранника  $M$  вектор

$$f(M) = (f_0, \dots, f_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где значение  $f_i = f_i(M)$  равно количеству  $i$ -мерных граней данного многогранника.

Если  $M$  — правильный многогранник, то группа  $\text{Sym } M$  транзитивно действует на гранях: любую грань можно перевести в любую другую грань той же размерности. Поэтому количество  $i$ -мерных граней равняется порядку группы  $\text{Sym } M$ , деленному на порядок стабилизатора  $(\text{Sym } M)_{F_i}$  данной  $i$ -мерной грани  $F_i$ .

Следующее предложение позволяет нам описать стабилизаторы  $i$ -мерных граней.

**Предложение 4.20.** Пусть  $(F_0, \dots, F_n)$  — флаг в  $M$ , а  $s_1, \dots, s_n$  — связанная с ним система образующих группы  $\text{Sym } M$ , описанная в п. 4.2. Стабилизатор  $(\text{Sym } M)_{F_i}$  грани  $F_i$  есть подгруппа в  $\text{Sym } M$ , порожденная  $n - 1$  отражением  $s_1, \dots, \widehat{s_{i+1}}, \dots, s_n$ . Таким образом,  $(\text{Sym } M)_{F_i}$  также является группой отражений; ее граф Кокстера получается из графа Кокстера группы  $\text{Sym } M$  удалением  $(i + 1)$ -й вершины.

**Доказательство.** В п. 4.2 мы видели, что плоскость  $H_{i+1}$  отражения  $s_{i+1}$  содержит грани с номерами, не превосходящими  $i - 1$ , и перпендикулярна всем граням с номерами  $i + 1$  и выше. Таким образом,

$$s_{i+1}(F_j) = F_j \quad \text{при } j \neq i.$$

Напротив, грань  $F_i$  переводится отражением  $s_{i+1}$  в другую грань, а именно, в смежную с  $F_i$  по ребру  $F_{i-1}$ . Следовательно,

$$(\text{Sym } M)_{F_i} = \langle s_1, \dots, \widehat{s_{i+1}}, \dots, s_n \rangle.$$

Оставшиеся утверждения получаются отсюда автоматически.  $\square$

Это предложение позволяет нам вычислить количество граней каждой размерности у всех правильных многогранников.

**Пример 4.21.** Вычислим количество  $i$ -мерных граней у правильного  $n$ -мерного симплекса. Его группа симметрий  $\text{Sym } M$  есть группа отражений типа  $A_n$ . Согласно предложению,  $(\text{Sym } M)_{F_i}$  есть группа отражений,

граф Кокстера которой получается удалением  $(i + 1)$ -й вершины из графа Кокстера  $\text{Sym } M$ , т. е.  $A_n$ .



Этот граф состоит из двух связанных компонент:  $A_i$  и  $A_{n-i-1}$ . Значит,

$$|(\text{Sym } M)_{F_i}| = (i + 1)!(n - i)!$$

(чтобы учесть случаи  $i = 0$  и  $i = n - 1$ , будем считать, что  $A_0$  есть пустой граф; напомним, что  $0! = 1$ , так что эти случаи не требуют дополнительного рассмотрения).

Следовательно, количество  $i$ -мерных ребер у правильного симплекса равно

$$f_i = \frac{|\text{Sym } M|}{|(\text{Sym } M)_{F_i}|} = \frac{(n + 1)!}{(i + 1)!(n - i)!} = C_{n+1}^{i+1}.$$

**Пример 4.22.** Теперь рассмотрим  $n$ -мерный куб. Ему соответствует ориентированный граф Кокстера  $B_n$ , в котором в качестве начальной вершины отмечена вершина при ребре с отметкой 4. Стабилизатор  $i$ -мерной грани есть группа отражений, соответствующая графу  $B_n$ , из которого удалена вершина с номером  $i + 1$ . Следовательно, граф Кокстера группы  $(\text{Sym } M)_{F_i}$  равен

$$\begin{aligned} &A_{n-1} \quad \text{при } i = 0; \\ &A_1 \sqcup A_{n-2} \quad \text{при } i = 1; \\ &B_i \sqcup A_{n-i-1} \quad \text{при } i \geq 2. \end{aligned}$$

Зная, что порядки групп отражений типа  $A_k$  и  $B_k$  равны  $(k + 1)!$  и  $2^k \cdot k!$  соответственно, находим, что

$$|(\text{Sym } M)_{F_i}| = 2^i \cdot i! \cdot (n - i)!,$$

откуда получаем количество  $i$ -мерных граней  $n$ -мерного куба:

$$f_i(M) = 2^{n-i} C_n^i.$$

Количество  $i$ -мерных граней  $n$ -мерного кокуба — многогранника, двойственного к кубу, — равно количеству  $(n - i - 1)$ -мерных граней куба, т. е.  $2^{i+1} C_n^{i+1}$ .

Аналогичным образом можно найти  $f$ -векторы исключительных правильных многогранников, соответствующих графам Кокстера  $F_4$ ,  $H_3$  и  $H_4$  (в последних двух случаях — с обеими возможными ориентациями). Полученные результаты можно представить в виде таблицы:

$n$	Граф Кокстера	Символ Шлефли	$f$ -вектор	Многогранник
1	•	$\emptyset$	(2)	отрезок
2	• — <sup><math>m</math></sup> •	( $m$ )	( $m, m$ )	$m$ -угольник
3	• — • — •	(3, 3)	(4, 6, 4)	тетраэдр
	• — <sup>4</sup> • — •	(4, 3)	(8, 12, 6)	куб
	• — • — <sup>4</sup> •	(3, 4)	(6, 12, 8)	октаэдр
	• — <sup>5</sup> • — •	(5, 3)	(20, 30, 12)	додекаэдр
	• — • — <sup>5</sup> •	(3, 5)	(12, 30, 20)	икосаэдр
4	• — • — • — •	(3, 3, 3)	(5, 10, 10, 5)	симплекс
	• — <sup>4</sup> • — • — •	(4, 3, 3)	(16, 32, 24, 8)	гиперкуб
	• — • — • — <sup>4</sup> •	(3, 3, 4)	(8, 24, 32, 16)	гипероктаэдр
	• — • — <sup>4</sup> • — •	(3, 4, 3)	(24, 96, 96, 24)	24-гранник
	• — <sup>5</sup> • — • — •	(5, 3, 3)	(600, 1200, 720, 120)	120-гранник
	• — • — • — <sup>5</sup> •	(3, 5, 3)	(120, 720, 1200, 600)	600-гранник
$n \geq 5$	• — • — • — ... — •	(3, ..., 3)	$(\dots, C_{n+1}^{i+1}, \dots)_{0 \leq i < n}$	симплекс
	• — <sup>4</sup> • — • — ... — •	(4, 3, ..., 3)	$(\dots, 2^{n-i} C_n^i, \dots)_{0 \leq i < n}$	куб
	• — ... — • — <sup>4</sup> •	(3, ..., 3, 4)	$(\dots, 2^{i+1} C_n^{i+1}, \dots)_{0 \leq i < n}$	кокуб

**Упражнение 4.23. а)** Прделайте самостоятельно вычисления  $f$ -векторов для исключительных многогранников в размерностях 3 и 4.

**б)** Гиперграни исключительных правильных многогранников размерности 4 являются правильными многогранниками размерности 3. Докажите, что гиперграни 24-, 120- и 600-гранника суть соответственно октаэдры, додекаэдры и тетраэдры.

В завершение предъявим без доказательства конструкции двух из трех исключительных четырехмерных многогранников — 24-гранника и 600-гранника (120-гранник будет получаться как двойственный к последнему). Оказывается, мы их уже встречали ранее, правда, под другими именами.

**Теорема 4.24.** 1. Пусть  $\mathfrak{I} \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$  — бинарная группа тетраэдра. Ее 24 элемента лежат в вершинах правильного 24-гранника в  $\mathbb{R}^4$ .

2. Все 120 элементов бинарной группы икосаэдра  $\mathfrak{I} \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$  лежат в вершинах правильного 600-гранника.

## Литература

1. *Арнольд В. И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: МЦНМО, 2002.
2. *Бугаенко В. О.* Правильные многогранники // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 107—115.
3. *Бугаенко В. О.* Классификация многогранников Кокстера // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 82—106.
4. *Винберг Э. Б.* Kaleidoscopes and groups of reflections // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 45—63.
5. *Жис Э. и др.* Размерности: математическая прогулка. (Мультфильм). Русская версия доступна на официальном сайте фильма, [http://dimensions-math.org/Dim\\_RU.htm](http://dimensions-math.org/Dim_RU.htm)
6. *Шварцман О. В.* Группы отражений и группы Кокстера // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 64—81.
7. *Coxeter H. S. M.* Regular polytopes. N. Y.: Dover Publications, 1973.
8. *Humphreys J. E.* Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge University Press, 1991.
9. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität // Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. 1901. Bd. 38. P. 1—237.