Функциональный анализ и его приложения
2008, т. 42, вып. 2, с. 56–67

УДК 512.743+512.761.2

Разрешения особенностей для многообразий Шуберта в двойных грассманианах

© 2008. Е. Ю. Смирнов

§1. Введение

Пусть V — конечномерное векторное пространство над произвольным полем $\mathbb{K}$.

Мы будем описывать пары подпространств пространства V фиксированных размерностей k и l с точностью до действия группы невырожденных верхнетреугольных матриц $B \subset \mathrm{GL}(V)$. Другими словами, мы описываем B-орбиты на прямом произведении $X = \mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$ двух грассмановых многообразий. Разложение многообразия X на B-орбиты является аналогом шубертовского разложения для грассманианов и разложения Эресмана–Брюа для многообразий полных флагов.

Комбинаторное описание B-орбит на X приводится (как частный случай некоторой более общей задачи) в работе Мадьяра, Веймана и Зелевинского [7] и существенно использует теорию колчанов. Приводимое ниже описание опирается лишь на элементарную линейную алгебру и не использует результатов из [7]. Оно является обобщением описания орбит в симметрическом пространстве $\mathrm{GL}_{k+l} / (\mathrm{GL}_k \times \mathrm{GL}_l)$, приведенного в диссертации Пина [8].

Нас также интересуют замыкания B-орбит в X. Они являются аналогами многообразий Шуберта в грассманианах. Особенности многообразий Шуберта хорошо изучены: для них имеются разрешения, построенные Боттом и Самельсоном; известно, что многообразия Шуберта являются нормальными, а их особенности рациональны; множества их особых точек могут быть явно описаны. Подробнее об этом можно прочитать, например, в лекциях [2] и книге [6]. Таким образом, было бы естественно задать те же вопросы (разрешение особенностей, нормальность, рациональность) и для замыканий B-орбит в X. В настоящей работе строятся разрешения особенностей для этих многообразий.

Мотивировкой для рассмотрения этих вопросов является также недавняя статья Бобинского и Звары [3], в которой доказывается, что особенности замыканий орбит в представлениях колчанов типа D эквивалентны особенностям многообразий Шуберта в двойных грассманианах.

Автор благодарит Мишеля Бриона за постоянное внимание к работе, а также Э. Б. Винберга и Д. А. Тимашёва за ценные обсуждения и замечания.

§2. Описание орбит

2.1. Обозначения. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{K}$, $k, l < n$ — натуральные числа. Результаты, приведенные в этом параграфе, верны над произвольным основным полем; в §§3, 4 требуется, чтобы поле $\mathbb{K}$ было алгебраически замкнутым. Прямое произведение $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$

будет обозначаться через X. Как правило, мы не будем различать точки в X и соответствующие конфигурации подпространств (U, W), где $U, W \subset V$, $\dim U = k$, $\dim W = l$.

Мы фиксируем борелевскую подгруппу B в $\mathrm{GL}(V)$. Через $V_\bullet = (V_1, \ldots, V_n = V)$ будет обозначаться полный флаг в V, неподвижный относительно группы B.

Комбинаторное описание. В этой части вводятся комбинаторные объекты, параметризующие пары подпространств с точностью до действия группы B. А именно, пары подпространств параметризуются тройками, состоящими из двух диаграмм Юнга, которые содержатся в прямоугольниках размера $k \times (n-k)$ и $l \times (n-l)$ соответственно, и инволютивной перестановки из S_n.

Параллельно с введением этих комбинаторных объектов мы строим некоторые «канонические» базисы пространств U, W и V.

Предложение 1. (i) *Существуют такие упорядоченные базисы* $(u_1, \ldots, u_k)$, $(w_1, \ldots, w_l)$ *и* $(v_1, \ldots, v_n)$ *пространств* U, W *и* V *соответственно, что*

- $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ *для всех* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *(угловые скобки обозначают линейную оболочку векторов)*;
- $u_i = v_{\alpha_i}$, *где* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *и* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$;
- *все* w_i *суть либо базисные векторы пространства* V, *либо векторы с двухэлементным «носителем»*: $w_i = v_{\beta_i}$ *или* $w_i = v_{\gamma_i} + v_{\delta_i}$, *где* $\gamma_i > \delta_i$; *кроме того, в последнем случае* $v_{\gamma_i} \in U$ *(т. е.* $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$*).*
- *все числа* β_i *(соответственно* γ_i, δ_i*) различны между собой; кроме того, все* δ_i *отличны от всех* α_i.

(ii) *В обозначениях п.* (i) *рассмотрим перестановку* $\sigma \in S_n$, *получаемую как произведение транспозиций* (δ_i, γ_i). *Поскольку носители транспозиций не пересекаются, результат их перемножения не зависит от порядка сомножителей.*

Тогда для данной пары подпространств (U, W) *множества* $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, $\bar{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{l-r}\}$, $\bar{\gamma} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ *и перестановка* σ *не зависят от выбора базисов в* U, W *и* V.

Доказательство. (i) Доказательство проводится индукцией по n.

При $n = 1$ утверждение очевидно.

Индуктивный переход от $n-1$ к n. Возьмем ненулевой вектор $v_1 \in V_1$ и рассмотрим следующие случаи:

• $v_1 \notin U + W$. Пусть $\bar{V} = V / \langle v_1 \rangle$. Возьмем в этом факторпространстве флаг $\bar{V}_\bullet = (\bar{V}_2 \subset \cdots \subset \bar{V}_n)$ и рассмотрим образ $(\bar{U}, \bar{W})$ конфигурации (U, W) при факторизации. Оба полученных подпространства будут изоморфны исходным: $\bar{U} \cong U$ и $\bar{W} \cong W$. Теперь применим предположение индукции к данной конфигурации следующим образом. Выберем в $\bar{U}$, $\bar{W}$ и $\bar{V}$ упорядоченные базисы $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k\}$, $\{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_l\}$ и $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-1}\}$, после чего выделим $\bar{V}$ в V прямым слагаемым: $\imath \colon \bar{V} \hookrightarrow V$. «Поднимем» указанные базисные векторы из $\bar{V}$ в V следующим образом: $u_i = \imath(\bar{u}_i)$, $w_i = \imath(\bar{w}_i)$, $v_i = \imath(\bar{v}_{i-1})$. Получим искомую тройку базисов.

• $v_1 \in U$, $v_1 \notin W$. Положим $u_1 = v_1$ и вновь применим предположение индукции к факторпространству $\bar{V} = V / \langle v_1 \rangle$ с флагом $\bar{V}_\bullet$ и конфигурации подпространств $(\bar{U}, \bar{W})$, получающихся из U и W при факторизации. В этом случае $\dim \bar{U} = \dim U - 1$. После этого опять поднимем полученные векторы из $\bar{U}$, $\bar{W}$ и $\bar{V}$ в V.

• Случай $v_1 \notin U$, $v_1 \in W$ разбирается аналогично предыдущему (полагаем $w_1 = v_1$).

• Если $v_1 \in U \cap W$, положим $u_1 = w_1 = v_1$ и вновь применим предположение индукции.

• Наиболее интересен последний случай: $v_1 \in U + W$, но $v_1 \notin U$ и $v_1 \notin W$. Тогда рассмотрим множество векторов $S = \{v \mid v \in U,\ v_1 + v \in W\}$. Поскольку v_1 принадлежит $U+W$, это множество непусто. Пусть теперь j — минимальное число, для которого V_j содержит векторы из S, и $v_j \in V_j \cap S$. Положим $u_1 = v_j$, $w_1 = v_1 + v_j$. Теперь применим предположение индукции к $(n-2)$-мерному пространству $\bar{V} = V/\langle v_1, v_j\rangle$, паре подпространств $\bar{U} = U/\langle v_1, v_j\rangle$, $\bar{W} = W/\langle v_1, v_j\rangle$ и флагу

$$\bar{V}_\bullet = V_2/V_1 \subset \cdots \subset V_{j-1}/V_1 = V_j/\langle v_1, v_j\rangle \subset V_{j+1}/\langle v_1, v_j\rangle \subset \cdots \subset V_n/\langle v_1, v_j\rangle.$$

«Подъем» базисных векторов из $\bar{V}$ в V осуществляется так:

$$v_i = \imath(\bar{v}_{i-1}) \quad \text{при } i \in [2, j-1], \qquad v_i = \imath(\bar{v}_{i-2}) \quad \text{при } i \in [j+1, n],$$

где $\imath$, как и прежде, обозначает некоторое вложение $\bar{V}$ в V. Векторы v_1 и v_j уже были определены ранее.

(ii) Предположим, что для конфигурации (U, W) существуют две тройки упорядоченных базисов $((u_1, \ldots, u_k), (w_1, \ldots, w_l), (v_1, \ldots, v_n))$ и $((u'_1, \ldots, u'_k), (w'_1, \ldots, w'_l), (v'_1, \ldots, v'_n))$, которые удовлетворяют условиям п. (i) и для которых либо соответствующие этим тройкам базисов наборы $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ и $(\bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}')$, либо перестановки σ и σ' отличны друг от друга.

Множество $\bar{\alpha}$ может быть описано следующим образом: $i \in \bar{\alpha}$ тогда и только тогда, когда $\dim U \cap V_i > \dim U \cap V_{i-1}$. Следовательно, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$.

Аналогично доказывается, что $\bar{\beta} \cup \bar{\gamma} = \bar{\beta}' \cup \bar{\gamma}'$.

Теперь докажем, что $\sigma = \sigma'$. Тем самым доказательство будет закончено, поскольку $\bar{\beta} = \{j \in \bar{\beta} \cup \bar{\gamma} \mid \sigma(j) = j\}$.

Пусть j — минимальное число из $\beta \cup \gamma$, для которого $\sigma(j) \neq \sigma'(j)$. Предположим, что $\sigma(j) < \sigma'(j)$. Возможны два варианта:

(a) $i := \sigma'(j) \neq j$. Заметим, что $i \notin \bar{\alpha}$. Рассмотрим подпространство

$$\begin{aligned}\widetilde{V} = (U \cap V_j) + V_{i-1} &= \langle v_s, v_{\alpha_i} \mid s \leqslant i-1,\ \alpha_i \in \bar{\alpha} \cup [i, j]\rangle \\ &= \langle v'_s, v'_{\alpha_i} \mid s \leqslant i-1,\ \alpha_i \in \bar{\alpha}' \cup [i, j]\rangle.\end{aligned}$$

Пусть $R = \{r \in \bar{\beta} \cup \bar{\gamma} \mid r, \sigma(r) \in [1, i-1] \cup (\bar{\alpha} \cap [i, j])\}$ и $R' = \{r \in \bar{\beta} \cup \bar{\gamma} \mid r, \sigma'(r) \in [1, i-1] \cup (\bar{\alpha} \cap [i, j])\}$. Легко убедиться, что

$$\dim \widetilde{V} \cap W = \#R = \#R'.$$

Но $\sigma(r) = \sigma'(r)$ для всех $r \in [1, j-1]$, а j принадлежит множеству R и не принадлежит R'. Значит, количество элементов в этих двух множествах различно, что и дает искомое противоречие.

(b) Если $\sigma'(j) = j$, положим $i = \sigma(j)$ и будем действовать аналогично тому, как действовали в п. (a).

Теперь введем комбинаторную конструкцию, параметризующую конфигурации подпространств. А именно, по конфигурации мы построим пару диаграмм Юнга, некоторые клетки в которых будут отмечены.

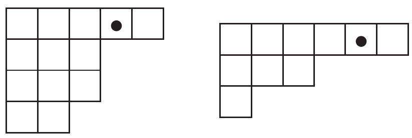
Рассмотрим пару подпространств (U, W). Построим по этой паре, как описано в предложении 1, множества $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ и инволюцию σ. Рассмотрим прямоугольник размера $k \times (n-k)$ и построим путь из его левого нижнего угла в правый верхний следующим образом: j-е звено пути будет вертикальным, если j принадлежит $\bar{\alpha}$ (т.е. если v_j равняется какому-то из u_i), и горизонтальным в противном случае. Этот путь ограничивает снизу первую диаграмму Юнга.

Вторая диаграмма будет содержаться в прямоугольнике размера $l \times (n-l)$. Мы снова построим ограничивающий ее путь: j-е звено пути будет вертикальным, если $j \in \bar{\beta} \cup \bar{\gamma}$, и горизонтальным в противном случае.

Если $j \in \bar{\gamma}$, то звено пути с номером $\sigma(j)$ горизонтально. Из этого также следует, что j-е звено пути, ограничивающего первую диаграмму, вертикально, а $\sigma(j)$-е горизонтально. Возьмем в каждой из диаграмм клетку, находящуюся над $\sigma(j)$-м звеном и слева от j-го звена, и поместим в этих клетках по точке.

Назовем такую пару диаграмм *отмеченной парой.*

Пример. Пусть $n = 9$, $k = 4$, $l = 3$. Предположим, что $\bar{\alpha} = \{3, 5, 6, 9\}$, $\bar{\beta} = \{2, 5\}$, $\bar{\gamma} = \{9\}$, $\sigma = (7, 9)$. Тогда соответствующая отмеченная пара диаграмм выглядит так:



Замечание. Отметим, что построенные диаграммы (как диаграммы без точек) совпадают с диаграммами, которые соответствуют клеткам Шуберта, содержащим точки $U \in \mathrm{Gr}(k, V)$ и $W \in \mathrm{Gr}(l, V)$. (Соответствие между диаграммами Юнга и клетками Шуберта в грассманиане описано, например, в книгах [4] или [6]).

2.3. Стабилизаторы и размерности орбит. Найдем стабилизатор $B_{(U,W)}$ данной конфигурации подпространств (U, W).

Предложение 2. *В обозначениях предложения* 1 *стабилизатор конфигурации* (U, W), *записанный в базисе* $(v_1, \ldots, v_n)$, *состоит из верхнетреугольных матриц* $A = (a_{ij}) \in B$, *удовлетворяющих следующим условиям*:

(a) $a_{\gamma\gamma} = a_{\sigma(\gamma)\sigma(\gamma)}$ *для всех* $\gamma \in \bar{\gamma}$;
(b) $a_{i\alpha} = 0$ *для всех* $\alpha \in \bar{\alpha}$, $i \notin \bar{\alpha}$;
(c) $a_{j\beta} = 0$ *для всех* $\beta \in \bar{\beta}$ *и* $j \notin \bar{\beta} \cup \bar{\gamma} \cup \sigma(\bar{\gamma})$;
(d) $a_{\gamma\beta} = a_{\sigma(\gamma)\beta}$ *для всех* $\beta \in \bar{\beta}$ *и* $\gamma \in \bar{\gamma}$, $\gamma < \beta$;
(e) $a_{j\gamma} = -a_{j\sigma(\gamma)}$ *для всех* $j \notin \bar{\beta} \cup \bar{\gamma} \cup \sigma(\bar{\gamma})$ *и* $\gamma \in \bar{\gamma}$;
(f) *для всех* $\gamma_1, \gamma_2 \in \bar{\gamma}$, $\gamma_1 < \gamma_2$ *имеет место один из следующих случаев*:

- $\sigma(\gamma_2) < \sigma(\gamma_1) < \gamma_1 < \gamma_2$: *тогда* $a_{\gamma_1\gamma_2} = a_{\sigma(\gamma_1)\gamma_2} = a_{\sigma(\gamma_2)\gamma_1} = a_{\sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)} = 0$;
- $\sigma(\gamma_1) < \sigma(\gamma_2) < \gamma_1 < \gamma_2$: *тогда* $a_{\sigma(\gamma_2)\gamma_1} = a_{\sigma(\gamma_1)\gamma_2} = 0$, $a_{\gamma_1\gamma_2} = a_{\sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)}$;
- $\sigma(\gamma_1) < \gamma_1 < \sigma(\gamma_2) < \gamma_2$: *тогда* $a_{\sigma(\gamma_1)\gamma_2} = 0$, $a_{\gamma_1\gamma_2} + a_{\gamma_1\sigma(\gamma_2)} = a_{\sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)}$.

Следствие 3. *Стабилизатор конфигурации* (U, W) *есть полупрямое произведение торической и унипотентной частей*:

$$B_{(U,W)} = T_{(U,W)} \ltimes U_{(U,W)},$$

где $T_{(U,W)}$ *есть подгруппа в группе невырожденных диагональных матриц, определяемая условиями* (a), *так что* $\dim T_{(U,W)} = n - \#\bar\gamma$, *а* $U_{(U,W)}$ *есть подгруппа в группе унитреугольных матриц, определяемая условиями* (b)–(f).

Определение. Коразмерность торической части стабилизатора называется *рангом* конфигурации (или соответствующей B-орбиты):

$$\mathrm{rk}(U,W) := n - \dim T_{(U,W)} = \#\bar\gamma.$$

Доказательство предложения 2. Прежде всего, стабилизатор $B_{(U,W)}$ является подгруппой в B, а следовательно, состоит из верхнетреугольных матриц.

Далее, он сохраняет подпространство $U = \langle v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_k}\rangle$. Это значит, что всякий элемент $A \in B_{(U,W)}$ переводит каждый из v_{α_i} в линейную комбинацию элементов v_{α_j}, и поэтому все матричные элементы $a_{i\alpha}$, где $\alpha \in \bar\alpha$, $i \notin \bar\alpha$, равны нулю. (Заметим, что нули в матрице A сами образуют повернутую на 90° по часовой стрелке диаграмму Юнга, соответствующую подпространству U. В частности, это доказывает, что размерность клетки Шуберта в грассманиане равна числу клеток в соответствующей диаграмме Юнга).

Итак, клетки первой диаграммы Юнга находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными уравнениями, задающими B_U в группе верхнетреугольных матриц: клетка, расположенная над i-м (горизонтальным) звеном и слева от j-го (вертикального) звена (обозначим ее через (i,j)) соответствует уравнению $a_{ij} = 0$.

Аналогично, стабилизатор нашей конфигурации сохраняет подпространство W. Это дает другой набор линейных уравнений на матричные элементы a_{ij}, и число этих уравнений равно числу клеток во второй диаграмме соответствующей отмеченной пары. Мы снова можем установить взаимно однозначное соответствие между клетками этой диаграммы и полученными уравнениями, обозначая клетки диаграммы, как в предыдущем абзаце. Вот это соответствие:

- $a_{j\beta} = 0$ для всех $\beta \in \bar\beta$ и $j \notin \bar\beta \cap \bar\gamma \cap \sigma(\bar\gamma)$, $j < \beta$; это соответствует клетке (j,β);
- $a_{j\gamma} = -a_{j\sigma(\gamma)}$ для всех $j \notin \bar\beta \cup \bar\gamma \cup \sigma(\bar\gamma)$ и $\gamma \in \bar\gamma$, $j < \gamma$; соответствующая клетка — это (j,γ);
- $a_{\sigma(\gamma)\gamma} + a_{\gamma\gamma} - a_{\sigma(\gamma)\sigma(\gamma)} = 0$ при всех $\gamma \in \bar\gamma$; соответствующая клетка — это $(\sigma(\gamma),\gamma)$;
- $a_{\gamma\beta} = a_{\sigma(\gamma)\beta}$ при всех $\beta \in \bar\beta$ и $\gamma \in \bar\gamma$, $\gamma < \beta$; это соответствует клетке $(\sigma(\gamma),\beta)$;
- $a_{\sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)} + a_{\sigma(\gamma_1)\gamma_2} = a_{\gamma_1\sigma(\gamma_2)} + a_{\gamma_1\gamma_2}$ для всех $\gamma_1 < \gamma_2$; это уравнение соответствует клетке $(\sigma(\gamma_1),\gamma_2)$.

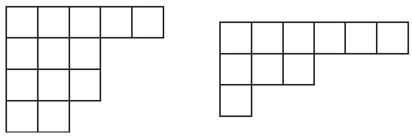
Это доказывает предложение. $\square$

Найдя стабилизатор конфигурации, мы можем отыскать его размерность, а значит, и размерность орбиты $B(U,W) \subset X$. Анализируя приведенные выше уравнения, можно найти комбинаторную интерпретацию размерности в терминах отмеченных диаграмм Юнга.

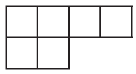
Для этого введем еще одно комбинаторное понятие. Пусть имеются два прямоугольника размера $k \times (n-k)$ и $l \times (n-l)$ соответственно и путь в каждом из них, ограничивающий диаграмму Юнга (оба пути имеют длину n). Рассмотрим множество всех чисел i, для которых i-е звенья обоих путей горизонтальны, и рассмотрим столбцы в диаграммах, лежащие над этими звеньями. Затем сделаем то же самое для пар «одновременно вертикальных» звеньев и рассмотрим строки слева от них.

Пересечение этих строк и столбцов также образует диаграмму Юнга. Назовем ее *общей диаграммой*, соответствующей данной паре диаграмм.

Пример. Паре (Y_1, Y_2) диаграмм Юнга



соответствует следующая общая диаграмма Y_{com}:



Согласно нашей конструкции отмеченных пар, точки могут содержаться только в общей диаграмме отмеченной пары.

Следствие 4. *Пусть (U, W) — конфигурация подпространств, которой соответствует отмеченная пара диаграмм Юнга (Y_1, Y_2) с точками в некоторых клетках диаграммы Y_{com}.*

Углом *с вершиной в данной клетке будем называть фигуру, образованную этой клеткой и всеми клетками, находящимися над ней в том же столбце и слева от нее в той же строке. Возьмем в диаграмме Y_{com} все углы с вершинами в клетках, содержащих точки. Пусть H — множество клеток, принадлежащих хотя бы одному из этих углов. Тогда размерность B-орбиты конфигурации (U, W) равна*

$$\dim B(U, W) = \#Y_1 + \#Y_2 - \#Y_{\text{com}} + \#H,$$

где через $\#Y$ обозначено количество клеток в диаграмме Y.

Замечание. $\#H$ равняется общему числу клеток, содержащихся во всех углах, а не сумме длин углов. Это означает, что клетку, содержащуюся в двух углах, следует считать один, а не два раза.

Доказательство следствия 4. В доказательстве предложения 2 рассматриваются две системы линейных уравнений на матричные элементы a_{ij}. Эти системы задают стабилизаторы подпространств U и W и состоят из $\#Y_1$ и $\#Y_2$ уравнений соответственно. Легко видеть, что уравнения, соответствующие клетке (i, j), совпадают в обеих системах, если клетка (i, j) общей диаграммы не содержится ни в каком угле, а также что система уравнений, полученная в результате объединения этих двух систем, линейно независима. Поэтому коразмерность стабилизатора $B_{(U,W)}$ в B (т. е. размерность орбиты $B(U, W)$) равна $\#Y_1 + \#Y_2 - \#Y_{\text{com}} + \#H$. $\square$

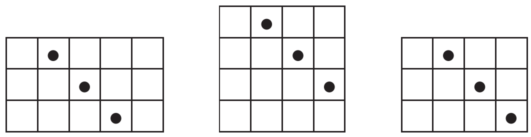
Пример. Пусть общая диаграмма для отмеченной пары имеет вид

$*$			$*$		$*$		
$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$\bullet$		
$\bullet$			$*$				
$*$	$*$	$*$	$\bullet$				

Тогда $\#Y_{\mathrm{com}} = 26$, $\#H = 15$ (H состоит из всех клеток, отмеченных точкой или звездочкой).

В частности, формула для размерности позволяет описать наименьшую (т. е. наиболее вырожденную) и наибольшую орбиты. Наименьшая орбита нульмерна и соответствует паре пустых диаграмм. Она состоит из одной точки $(\langle v_1, \ldots, v_k\rangle, \langle v_1, \ldots, v_l\rangle) \in X$. Обе диаграммы Юнга, соответствующие наибольшей орбите, являются прямоугольниками размера $k \times (n-k)$ и $l \times (n-l)$ соответственно. Их общая диаграмма также есть прямоугольник размера $\min\{k,l\} \times (n - \max\{k,l\})$, точки в котором располагаются по главной диагонали, начинающейся в нижнем правом углу.

Пример. Для $n = 8$, $k = 3$ и $l = 4$ наибольшей орбите соответствует такая отмеченная пара:



Y_1 Y_2 Y_{com}

2.4. Разложение многообразия X в объединение $\mathrm{GL}(V)$-орбит. $\mathrm{GL}(V)$-орбиты в X допускают существенно более простое описание: они параметризуются только одним целым положительным числом, а именно, размерностью пересечения подпространств U и W. Для этого числа (обозначим его через i) имеются неравенства

$$\max\{0, k + l - n\} \leqslant i \leqslant \min\{k, l\}.$$

Обозначим соответствующую $\mathrm{GL}(V)$-орбиту через X_i:

$$X = \bigsqcup_{i \in [\max\{0,k+l-n\}, \min\{k,l\}]} X_i.$$

Из конструкции комбинаторных данных, соответствующих B-орбитам, следует, что размерность пересечения $\dim(U \cap W)$ равна $\#(\bar{\alpha} \cap \bar{\beta})$.

§ 3. Слабый порядок на множестве орбит

В предыдущем параграфе мы описали множество B-орбит в $\mathrm{Gr}(k,V) \times \mathrm{Gr}(l,V)$. На этом множестве существует несколько структур частичного порядка. Первая, и наиболее естественная, описывается так:

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ — две B-орбиты в $\mathrm{Gr}(k,V) \times \mathrm{Gr}(l,V)$. Скажем, что $\mathcal{O}$ не превосходит $\mathcal{O}'$ относительно *сильного* (или *топологического*) *порядка*, если $\mathcal{O} \subset \bar{\mathcal{O}}'$ (здесь и далее черта над символом обозначает замыкание в топологии Зарисского). Обозначение: $\mathcal{O} \leqslant \mathcal{O}'$.

На этом множестве существует и другой порядок, обычно называемый слабым. Обозначения, используемые ниже, взяты из работы [1].

Пусть W — группа Вейля для $\mathrm{GL}(n)$, а Δ — соответствующая система корней. Обозначим простые отражения через $s_1, \ldots, s_{n-1}$, а соответствующие простые корни через $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Пусть $P_i = B \cup Bs_iB$ — минимальная параболическая подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$, соответствующая простому корню α_i.

Будем говорить, что α_i *поднимает* орбиту $\mathcal{O}$ до орбиты $\mathcal{O}'$, если $\bar{\mathcal{O}}' = P_i\bar{\mathcal{O}} \neq \bar{\mathcal{O}}$. В этом случае $\dim \mathcal{O}' = \dim \mathcal{O} + 1$. Это понятие позволит нам определить слабый порядок.

Определение. Орбита $\mathcal{O}$ меньше или равна орбите $\mathcal{O}'$ относительно *слабого порядка* (обозначение: $\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}'$), если $\bar{\mathcal{O}}'$ может быть получена как результат нескольких последовательных «поднятий» замыкания орбиты $\mathcal{O}$ при помощи минимальных параболических подгрупп:

$$\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}' \iff \exists (i_1, \ldots, i_r) \colon \bar{\mathcal{O}}' = P_{i_r} \ldots P_{i_1} \bar{\mathcal{O}} = \overline{P_{i_r} \ldots P_{i_1} \mathcal{O}}.$$

Будем представлять это отношение порядка при помощи ориентированного графа. Рассмотрим граф $\Gamma(X)$, вершинами которого являются B-орбиты в X. Соединим $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ ребром с меткой i, направленным к $\mathcal{O}'$, если P_i поднимает $\mathcal{O}$ до орбиты $\mathcal{O}'$.

Ясно, что каждая связная компонента графа $\Gamma(X)$ состоит из всех орбит, принадлежащих одной и той же $\mathrm{GL}(V)$-орбите X_i, и что во всякой связной компоненте имеется наибольший элемент, т. е. B-орбита, открытая в X_i.

Наша следующая цель состоит в описании минимальных элементов относительно слабого порядка в каждой из связных компонент.

3.1. Комбинаторное описание действия минимальных параболических подгрупп. Рассмотрим орбиту $\mathcal{O}$ и соответствующие ей комбинаторные данные: множества $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ и инволюцию $\sigma \in S_n$. Пусть минимальная параболическая подгруппа $P_i = B \cup Bs_iB$ поднимает орбиту $\mathcal{O}$ до орбиты $\mathcal{O}' \neq \mathcal{O}$. Опишем комбинаторные данные ($\bar{\alpha}'$, $\bar{\beta}'$, $\bar{\gamma}'$, σ') для орбиты $\mathcal{O}'$.

Обозначим простую транспозицию $(i, i+1) \in S_n$ через τ_i.

Возможны следующие случаи:

1. Пусть

$$i \in \bar{\alpha}, \quad i \notin \bar{\beta}, \quad i+1 \notin \bar{\alpha}, \quad i+1 \in \bar{\beta}$$

или, наоборот,

$$i \notin \bar{\alpha}, \quad i \in \bar{\beta}, \quad i+1 \in \bar{\alpha}, \quad i+1 \notin \bar{\beta}.$$

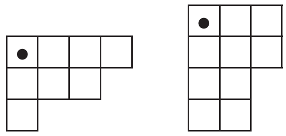
Эти два варианта соответствуют двум орбитам, которые могут быть подняты при помощи P_i до $\mathcal{O}'$. В этом случае комбинаторные данные для $\mathcal{O}'$ выглядят так:

$$\bar{\alpha}' = \bar{\alpha} \cup \{i+1\} \setminus \{i\}, \quad \bar{\beta}' = \bar{\beta} \setminus \{i, i+1\}, \quad \bar{\gamma}' = \bar{\gamma} \cup \{i+1\}, \quad \sigma' = \sigma \cdot \tau_i.$$

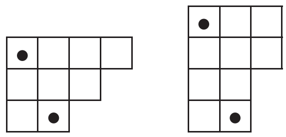
Отметим, что $\mathrm{rk}\, \mathcal{O}' = \mathrm{rk}\, \mathcal{O} + 1$, $\dim \mathcal{O}' = \dim \mathcal{O} + 1$.

На языке отмеченных пар диаграмм это можно представить так. Если i-е и $(i+1)$-е звенья пути, который ограничивает первую диаграмму, образуют углубление (т.е. первое из них вертикально, а второе горизонтально), а соответствующие звенья для второй диаграммы образуют выступ (или же, наоборот, на данном месте в первой диаграмме имеется выступ, а во второй — углубление), то обе эти пары звеньев заменяются на выступ, ограничивающий клетку с точкой.

Пример. Применим минимальную параболическую подгруппу P_2 к орбите $\mathcal{O} \subset \mathrm{Gr}(3,7) \times \mathrm{Gr}(4,7)$, задаваемой отмеченной парой диаграмм



Полученная в результате поднятия орбита $\mathcal{O}'$ будет задаваться отмеченной парой



2. Во всех остальных случаях $\bar{\alpha}' = \tau_i(\bar{\alpha})$, $\bar{\beta}' = \tau_i(\bar{\beta})$, $\bar{\gamma}' = \tau_i(\bar{\gamma})$, а перестановка σ' есть результат сопряжения перестановки σ при помощи τ_i:

$$\tilde{\sigma} = \tau_i \sigma \tau_i.$$

Ранги исходной и полученной орбит равны: $\mathrm{rk}\,\mathcal{O}' = \mathrm{rk}\,\mathcal{O}$.

3.2. Минимальные орбиты.

Лемма 5. *Все минимальные относительно слабого порядка B-орбиты в данной $\mathrm{GL}(V)$-орбите имеют ранг 0.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\mathcal{O}$ — минимальная орбита положительного ранга, и пусть ей соответствует набор комбинаторных данных $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \sigma)$, причем $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Пусть $p \in \bar{\gamma}$, $p' = \sigma(p)$. Без потери общности предположим, что ни для какого другого $q \in \bar{\gamma}$ не выполнено условие $p < q < \sigma(q') < p'$.

Обозначим через C_1 множество выступов в первой диаграмме, расположенных между p-м и p'-м звеньями, т. е. множество индексов i, $p \leqslant i < p'$, для которых i-е звено в первой диаграмме горизонтально, а $(i+1)$-е вертикально. Пусть также D_1 есть множество углублений т. е. таких i, что $p \leqslant i < p'$ и при этом i-е звено вертикально, а $(i+1)$-е горизонтально.

Обозначим аналогичные множества для второй диаграммы через C_2 и D_2. Заметим, что $\#C_1 = \#D_1 + 1$ и $\#C_2 = \#D_2 + 1$, поскольку в обеих диаграммах p-е звенья горизонтальны, а p'-е вертикальны.

Теперь рассмотрим такое число j, что $j \in (C_1 \setminus D_2) \cup (C_2 \setminus D_1)$. При помощи рассуждений из разд. 3.1 можно показать, что $\bar{\mathcal{O}} = P_j \bar{\mathcal{O}}'$ для некоторой орбиты $\mathcal{O}'$. Действительно, предъявим эту орбиту.

Если перестановка σ содержит транспозицию $(j, j+1)$, то комбинаторными данными для орбиты $\mathcal{O}'$ будут

$$\bar{\alpha}' = \bar{\alpha} \cup \{j\} \setminus \{j+1\}, \quad \bar{\beta}' = \bar{\beta} \cup \{j\}, \quad \bar{\gamma}' = \bar{\gamma} \setminus \{j+1\}, \quad \sigma' = \sigma \cdot \tau_j.$$

В противном случае $\bar{\alpha}' = \tau_j(\bar{\alpha})$, $\bar{\beta}' = \tau_j(\bar{\beta})$, $\bar{\gamma}' = \tau_j(\bar{\gamma})$, $\sigma' = \tau_j \sigma \tau_j$.

Подсчет размерностей показывает, что $\dim \mathcal{O}' = \dim \mathcal{O} - 1$.

Остается показать, что множество $(C_1 \setminus D_2) \cup (C_2 \setminus D_1)$ непусто:

$$\begin{aligned} \#((C_1 \setminus D_2) \cup (C_2 \setminus D_1)) &\geqslant \max(\#(C_1 \setminus D_2), \#(C_2 \setminus D_1)) \\ &\geqslant \max(\#C_1 - \#C_2 + 1, \#C_2 - \#C_1 + 1) \geqslant 1. \end{aligned}$$ □

После этого можно найти все минимальные орбиты в X_d. Легко видеть, что им соответствуют следующие комбинаторные данные:

$$\bar\alpha \cup \bar\beta = \{1, \ldots, k + l - d\}, \quad \bar\alpha \cap \bar\beta = \{1, \ldots, d\}, \quad \bar\gamma = \varnothing, \quad \sigma = \mathrm{Id}\,.$$

Размерности всех минимальных орбит в X_d равны $(k-d)(l-d)$. В частности, это означает, что они все замкнуты в X_d (поскольку X_d не содержит орбит меньших размерностей). Они соответствуют разложениям множества $\{d+1, \ldots, k+l-d\}$ на два непересекающихся подмножества, $\bar\alpha \setminus \bar\beta$ и $\bar\beta \setminus \bar\alpha$. Поэтому их число равно биномиальному коэффициенту $\binom{k+l-2d}{k-d}$.

Также заметим, что пара диаграмм Юнга, соответствующая минимальной орбите, является дополнительной: эти две диаграммы, будучи сложенными вместе, образуют прямоугольник размера $(k - d) \times (l - d)$.

Поскольку общая диаграмма для каждой из пар диаграмм, соответствующих минимальным орбитам, пуста, то все минимальные B-орбиты также являются $(B \times B)$-орбитами, т. е. прямыми произведениями клеток Шуберта, взятых в каждом из двух грассманианов.

Эти результаты могут быть подытожены в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *В каждом X_d, где $d \in [\max\{k+l-n, 0\}, \min\{k, l\}]$, содержится $\binom{k+l-2d}{k-d}$ минимальных орбит. Они все замкнуты в X_d, имеют размерность $(k - d)(l - d)$ и являются прямыми произведениями клеток Шуберта.*

§4. Разрешения особенностей для замыканий орбит

В этом параграфе строятся разрешения особенностей для замыканий B-орбит в X.

Для минимальной параболической подгруппы P_i и замыкания орбиты $\bar{\mathcal{O}}$ рассмотрим морфизм

$$F_i\colon P_i \times^B \bar{\mathcal{O}} \to P_i\bar{\mathcal{O}}, \qquad (p, x) \mapsto px.$$

Предположим, что $\bar{\mathcal{O}} \neq P_i\bar{\mathcal{O}}$. В работах Кнопа [5] и Ричардсона–Спрингера [9] показано, что при этом имеет место один из трех случаев:

- Тип U: $P_i\mathcal{O} = \mathcal{O}' \sqcup \mathcal{O}$ и F_i бирационален;
- Тип N: $P_i\mathcal{O} = \mathcal{O}' \sqcup \mathcal{O}$ и F_i имеет степень 2;
- Тип T: $P_i\mathcal{O} = \mathcal{O}' \sqcup \mathcal{O} \sqcup \mathcal{O}''$ и F_i бирационален. В этом случае $\dim \mathcal{O}'' = \dim \mathcal{O}$.

Оказывается, что в нашей ситуации тип N невозможен.

Предложение 7. *Пусть $\mathcal{O}$ есть B-орбита в X и P_i — такая минимальная параболическая подгруппа, что $P_i\mathcal{O} \neq \mathcal{O}$. Тогда отображение $F_i\colon P_i \times^B \mathcal{O} \to P_i\mathcal{O}$ бирационально.*

Доказательство. Выберем канонический представитель x орбиты $\mathcal{O}$, как это было сделано в предложении 1. Непосредственное вычисление показывает, что стабилизатор элемента x в P_i равняется его стабилизатору в B, описанному в предложении 2. Отсюда следует бирациональность отображения F_i. □

Замечание. Два оставшихся типа соответствуют двум случаям, описанным в разд. 3.1: T соответствует п. 1, а U — п. 2. В первом случае ранг орбиты увеличивается на 1, во втором остается неизменным. Поэтому слабый порядок совместим с функцией ранга: если $\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}'$, то $\operatorname{rk} \mathcal{O} \leqslant \operatorname{rk} \mathcal{O}'$. Это верно и для произвольных сферических многообразий, см., например, [1]. Отметим, что сильный порядок с функцией ранга не совместим.

Предложение 7 вместе с теоремой 6 позволяет построить разрешения особенностей для $\bar{\mathcal{O}}$, аналогичные разрешениям Ботта–Самельсона для многообразий Шуберта в грассманианах.

Пусть дана орбита $\mathcal{O}$. Рассмотрим произвольную минимальную орбиту $\mathcal{O}_{\min}$, меньшую либо равную $\mathcal{O}$ в смысле слабого порядка. Это значит, что существует последовательность минимальных параболических подгрупп $(P_{i_1}, \ldots, P_{i_r})$, для которой

$$\bar{\mathcal{O}} = P_{i_r} \cdots P_{i_1} \bar{\mathcal{O}}_{\min}.$$

Рассмотрим отображение

$$F\colon P_{i_r} \times^B \cdots \times^B P_{i_1} \times^B \bar{\mathcal{O}}_{\min} \to \bar{\mathcal{O}}, \qquad F\colon (p_{i_r}, \ldots, p_{i_1}, x) \mapsto p_{i_r} \cdots p_{i_1} x.$$

Согласно предложению 7, оно бирационально. Но это пока еще не разрешение особенностей, поскольку $\bar{\mathcal{O}}_{\min}$ может быть особым многообразием.

Второй шаг заключается в построении B-эквивариантного разрешения особенностей многообразия $\bar{\mathcal{O}}_{\min}$. Теорема 6 утверждает, что $\bar{\mathcal{O}}_{\min}$ может быть представлено в виде прямого произведения

$$\bar{\mathcal{O}}_{\min} = X_w \times X_v$$

для некоторых многообразий Шуберта $X_w \subset \mathrm{Gr}(k, V)$ и $X_v \subset \mathrm{Gr}(l, V)$.

Для X_w и X_v можно взять разрешение Ботта–Самельсона:

$$F_w\colon Z_w \to X_w \quad \text{и} \quad F_v\colon Z_v \to X_v.$$

(Подробности этого описаны, например, в [2]). Итак, мы получаем разрешение

$$F_w \times F_v\colon\ Z_w \times Z_w \to X_w \times X_v = \bar{\mathcal{O}}_{\min}.$$

Рассмотрев композицию этого отображения с отображением F, получаем основной результат работы:

Теорема 8. *Отображение*

$$\widetilde{F} = F \circ (F_w \times F_v)\colon\ P_{i_r} \times^B \cdots \times^B P_{i_1} \times^B (Z_w \times Z_v) \to \bar{\mathcal{O}}$$

есть разрешение особенностей для многообразия $\bar{\mathcal{O}}$.

Доказательство. Уже было показано, что оба отображения F и $F_w \times F_v$ суть бирациональные морфизмы. Поскольку все рассматриваемые многообразия проективны, эти морфизмы являются собственными. Многообразие $P_{i_r} \times^B \cdots \times^B P_{i_1} \times^B (Z_w \times Z_v)$ есть последовательность однородных B-расслоений с неособым слоем, и поэтому оно само является неособым. □

Литература

[1] M. Brion, *On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties*, Comment. Math. Helv., **76**:2 (2001), 263–299.

[2] M. Brion, *Lectures on the geometry of flag varieties*, in: Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005, 33–85.

[3] G. Bobiński, G. Zwara, *Schubert varieties and representations of Dynkin quivers*, Colloq. Math., **94**:2 (2002), 285–309.

[4] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, М., 2006.

[5] F. Knop, *On the set of orbits for a Borel subgroup*, Comment. Math. Helv., **70**:2 (1995), 285–309.
[6] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, *Cours Spécialisés*, 3, Soc. Math. France, Paris, 1998.
[7] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math., **141**:1 (1999), 97–118.
[8] S. Pin, *Adhérences d'orbites des sous-groupes de Borel dans les éspaces symétriques*, Thèse de doctorat, Institut Fourier, Grenoble, 2001; `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/ps/t107.ps`.
[9] R. W. Richardson, T. A. Springer, *The Bruhat order on symmetric varieties*, Geom. Dedicata, **35**:1–3 (1990), 389–436.

Независимый московский университет
Institut Fourier
e-mail: smirnoff@mccme.ru

Поступило в редакцию
1 сентября 2006 г.