

## Отчет по гранту Делиня за 2011 год

Владлен Тиморин

## Результаты, полученные в этом году

Операция спаривания (mating) многочленов была введена Дуади и Хаббардом. Эта операция превращает два многочлена одинаковой степени в топологическую динамическую систему, которая во многих случаях оказывается топологически сопряженной рациональной функции. Рассмотрим квадратный многочлен  $p_c(z) = z^2 + c$ . *Заполненным множеством Жюлиа*  $K_c$  многочлена  $p_c$  называется множество всех точек  $z \in \mathbb{C}$ , орбиты которых под действием итераций многочлена  $p_c$  не убегают на бесконечность. *Множество Жюлиа*  $J_c$  определяется как граница заполненного множества Жюлиа. Если множество Жюлиа локально связно, то, как известно, существует непрерывная сюръекция  $\gamma_c : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J_c$ , полусопрягающая отображение удвоения с отображением  $p_c$ . Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на множестве  $K_c \sqcup K_{c'}$ . Точка  $z \in K_c$  эквивалентна точке  $w \in K_{c'}$ , если  $z = \gamma_c(\theta)$  и  $w = \gamma_{c'}(-\theta)$  для некоторого  $\theta$ . На факторпространстве  $X$  по этому отношению эквивалентности действует отображение  $f$ , которое совпадает с  $p_c$  на образе множества  $K_c$  и с  $p_{c'}$  на образе множества  $K_{c'}$ . Топологическая динамическая система  $f : X \rightarrow X$  называется *топологическим спариванием* многочленов  $p_c$  и  $p_{c'}$ . *Конформным спариванием* двух многочленов называется любая рациональная функция, действие которой на сфере Римана топологически сопряжено топологическому спариванию рассматриваемых многочленов.

В работе [2] мы нашли дуги в пространствах параметров квадратичных рациональных функций, состоящие из спариваний. Общее наблюдение в одномерной комплексной динамике состоит в том, что поведение орбит критических точек во многом отвечает за все динамическое поведение рассматриваемого голоморфного отображения. Поэтому при рассмотрении динамики квадратичных рациональных функций, естественно накладывать некоторые ограничения на одну из двух критических точек. Так, в работах Дж. Милнора и М. Рис были введены параметрические кривые  $Per_k(0)$ , которые состоят из классов голоморфной сопряженности квадратичных рациональных функций  $f$  с отмеченными критическими точками  $c_1, c_2$ , таких, что  $f^{\circ k}(c_1) = c_1$ . Заметим, что  $Per_1(0)$  совпадает с активно изучаемым *квадратичным семейством*  $z^2 + c$ . Мы доказали, что границы гиперболических компонент определенного типа в  $Per_k(0)$  состоят исключительно из спариваний. Границы многих других гиперболических компонент содержат целые дуги, состоящие из спариваний.

В [5] описаны отображения из части плоскости в трехмерное пространство, переводящие отрезки прямых в отрезки плоских кривых, а также отображения

из части плоскости в плоскость, переводящие отрезки прямых в дуги коник из трехмерных линейных систем. Рассмотрим открытое подмножество  $U \subset \mathbb{R}P^2$  и отображение  $f : U \rightarrow \mathbb{R}P^3$ . Отображение  $f$  называется *планаризацией*, если, для каждой прямой  $L \subset \mathbb{R}P^2$ , образ  $f(L \cap U)$  лежит в некоторой плоскости. Я получил следующее описание всех планаризаций: любая планаризация является (возможно, при ограничении на меньшее открытое множество) котривиальной или дробно-кубической. Котривиальная планаризация  $f$  определяется следующим свойством: найдется точка  $a \in \mathbb{R}P^3$ , такая, что, для каждой прямой  $L \subset \mathbb{R}P^2$ , множество  $f(L \cap U)$  лежит в плоскости, проходящей через  $a$ . Дробно-кубическая планаризация — это планаризация, являющаяся ограничением кубического рационального отображения, т.е. отображения, заданного в однородных координатах кубическими однородными многочленами. Пользуясь описанным результатом, я, для каждой трехмерной линейной системы  $\mathcal{L}$  коник в  $\mathbb{R}P^2$ , описал все отображения  $f : U \rightarrow \mathbb{R}P^2$ , переводящие отрезки прямых в дуги коник из  $\mathcal{L}$ .

### Опубликованные и поданные в печать работы

- [1 ] A. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V. Timorin, “Topological polynomials with a simple core”, To appear in the Proceedings of the International Conference "Frontiers in Complex dynamics" <http://arxiv.org/abs/1106.5022>
- [2 ] I.A. Mashanova, V.A. Timorin, Captures, matings and regluing, // arXiv, 11/2011. Submitted to Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse.
- [3 ] V.A. Kiritchenko, E.Smirnov, V.A. Timorin, Convex chains for Schubert varieties // Oberwolfach Reports, Switzerland: European Mathematical Society, 2011.
- [4 ] V.A. Kiritchenko, E.Smirnov, V.A. Timorin, Gelfand-Zetlin polytopes and Demazure characters // Proceedings of the International Conference "50 years of ИТР Москва: ИППИ РАН, 2011.
- [5 ] V.A. Timorin, Planarizations and maps taking lines to linear webs of conics // arxiv.org, 08/2011. Submitted to Mathematical Research Letters
- [6 ] V.A. Kiritchenko, E.Smirnov, V.A. Timorin, Schubert calculus and Gelfand-Zetlin polytopes // arxiv.org, 01/2011. Submitted to “Annales de l’Institut Fourier”

### Препринты:

- [1 ] V.A. Timorin, Cut and semi-conjugate // arXiv, 10/2011

**Доклады на конференциях, школах, коллоквиумах**

- февраль** Математическая зимняя школа НИУ ВШЭ. *Топологические модели для рациональных функций и переклейка*
- февраль** International Conference “Frontiers in Complex Dynamics”, February 20 — February 25, Banff, Canada. *Partial semi-conjugacies between rational functions*
- март** Texas Ergodic Theory Workshop, March 22 — March 23, Houston, USA. *Topological cubic polynomials*
- март** Ahlfors-Bers Colloquium 2011, March 24 — March 27, Houston, USA. *Partial holomorphic semi-conjugacies between rational functions*
- июнь** International Conference “Polynomial Matings” June 8 — June 11, Toulouse, France. *Matings, captures and regluing*
- июнь** Летняя школа “Динамические Системы”, 25 июня — 7 июля, Дубна. *Алгоритм Терстона и кролики Дуади*
- июль** Летняя школа “Современная математика 18 июня — 29 июля, Дубна. *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и формул Гурвица*
- декабрь** Colloquium, University of Alabama at Birmingham, USA. *Matings, captures and regluing*

Я также делал доклады на семинаре лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений в НИУ ВШЭ, на семинаре по динамическим системам в МГУ, на семинаре Добрушинской лаборатории ИППИ, на семинаре «Геометрия и динамика» в МИАН.

**Работа в международных научных группах**

Мы продолжаем совместный проект с Александром Блохом, Лексом Оверстигеном и Россом Птачеком из университета Алабамы в Бирмингеме. Проект посвящен изучению пространства параметров топологических кубических многочленов. В этом году мы закончили статью [1], и теперь заканчиваем ее продолжение, содержащие описание срезов главной кубоиды. С 30 ноября по 10 декабря я посетил университет Алабамы в Бирмингеме, чтобы обсудить планы работ по этому проекту.

**Педагогическая деятельность**

Я преподаю на факультете математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики». В этом году, я читал следующие курсы:

1. уравнения в частных производных, 3 курс
2. гамильтоновы и интегрируемые системы, 3–4 курсы

Вместе с П.Е. Пушкарем, мы вели научно–исследовательский семинар «Дискретные динамические системы» в НИУ ВШЭ. Сейчас, вместе с А.А. Аграчевым, А.И. Буфетовым и А.В. Клименко, мы ведем совместный семинар НИУ ВШЭ и НОЦ МИАН «Геометрия и динамика». Я участвую в проведении учебных семинаров по топологии на 2 курсе.

Я являюсь координатором магистерских программ факультета математики, отвечаю за проведение профориентационной зимней школы по математике для студентов ВУЗов. Кроме того, я занимаюсь подготовкой заданий и проведением студенческой олимпиады ГУ-ВШЭ по математике. Я руковожу курсовыми и дипломными работами семи студентов.

В Независимом Московском Университете, я вел основной курс анализа для студентов 1 курса.