ОТЧЁТ
по стипендии Пьера Делиня
за 2007 г.

Стипендиат: Борисов Денис Иванович, Башкирский государственный педагогический университет, г. Уфа.

Статьи, опубликованные при поддержке стипендии

[1]. Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. Спектр периодического оператора с малым локализованным возмущением //Доклады АН. 2007. Т. 413. № 4. С. 439-443.

[2]. Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением // Известия АН. Серия математическая. 2008. Т. 72. № 4, принято к печати.

[3]. Д.И. Борисов. О некоторых сингулярных возмущениях периодических операторов // Теоретическая и математическая физика. 2007. Т. 151. № 2. С. 207-218.

[4]. D. Borisov. On the spectrum of two quantum layers coupled by a window // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007. V. 40. No. 19. P. 5045-5066.

[5]. Д.И. Борисов. Асимптотики для решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Алгебра и анализ, принято к печати.

[6]. Д.И. Борисов. Асимптотики собственных значений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Труды ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2, принято к печати.

[7]. D. Borisov. Asymptotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2007. V. 10. No. 2. P. 155-196.

Участие в научных конференциях

1. Conference "Analytic and algebraic methods in physics". Prague. February, 20, 2007.

2. Conference "Analytic and algebraic methods in physics II". Prague. April, 3, 2007.

3. 3rd Walkshop "Operators, Spectra and Mathematical Physics", Göttingen. June, 20, 2007.

4. Workshop "Perturbed periodic PDE, problems with singular boundaries, and their numerical aspects". Cardiff. September, 25-26, 2007.

Научные результаты, полученные за отчётный период

В работах [1], [2] рассматривался периодический дифференциальный оператор на оси с малым локализованным возмущением. Невозмущённый оператор задавался в виде $-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx}+q$, где $p=p(x)$, $q=q(x)$ – достаточно гладкие 1-периодические вещественные функции, и $p(x)\geqslant p_0>0$. Возмущение имело вид $\varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon$, где ε – малый положительный параметр, а $\mathcal{L}_\varepsilon : W_2^2(Q)\to L_2(\mathbb{R};Q):=\{u : u\in L_2(\mathbb{R}), \operatorname{supp} u\subseteq \overline{Q}\}$ – произвольное семейство линейных операторов, ограниченных равномерно по ε, где $Q\subset\mathbb{R}$ – произвольный фиксированный конечный отрезок вещественной прямой. Симметричность для возмущающего оператора не предполагалась, то есть, возмущённый оператор не предполагался самосопряжённым. Целью работ являлось исследование качественных и асимптотических свойств спектра возмущённого оператора.

Было доказано, что непрерывный спектр устойчив относительно возмущения и совпадает с непрерывным спектром невозмущённого оператора. В силу периодичности предельного оператора, непрерывный спектр возмущённого оператора имеет зонную структуру. Было доказано, что остаточный спектр возмущённого оператора пуст, а точечный спектр содержит не более, чем конечное число собственных значений конечной кратности, и не имеет конечных точек накопления.

Были установлены следующие асимптотические свойства спектра возмущённого оператора. При $\varepsilon\to+0$ собственные значения возмущённого оператора сходятся к краям лакун в непрерывном спектре, либо стремятся к бесконечности. Собственные значения, сходящиеся к краям лакун, обязательно простые. К каждому краю лакуны сходится не более одного собственного значения. Были установлены необходимые и достаточные условия существования собственного значения, сходящегося к заданному краю лакуны; в случае существования были построены асимптотические разложения данных собственных значения. Также было описано асимптотическое поведение соответствующих собственных функций.

Рассматривался вопрос о наличии вложенных собственных значений. Установлено, что если такое собственное значение существует, то оно обязательно стремится к бесконечности при $\varepsilon\to+0$. Было показано, что в случае общего положения вложенные собственные значения могут существовать; приведён соответствующий пример. Вместе с тем, выяснены достаточные условия, гарантирующие отсутствие вложенных собственных значений.

В работе [3] результаты, аналогичные описанным выше, были установлены для двух примеров сингулярных возмущений; описанное выше возмущение $\varepsilon\mathcal{L}_\varepsilon$ является регулярным. Первым примером является возмущение дельта-потенциалом с малой комплексной константой связи, второй пример – возмущение быстро осциллирующим комплексным потенциалом с компактным носителем и большой амплитудой. Было показано, что все описанные выше результаты верны и для данных двух примеров. Кроме того, было установлено, что для данных примеров вложенные собственные значения отсутствуют. Были выписаны необходимые и достаточные условия существования собственного значения, сходящегося к заданному краю лакуны; в случае существования были построены асимптотические разложения данных собственных значений. Явное задание возмущения в этих примеров позволило получить последние результаты в максимально явной форме.

В работе [4] изучалась система, состоящая из двух плоско-параллельных неограниченных трёхмерных слоев, имеющих общую границу. В общей границе вырезалась конечная односвязная область – окно. В такой области рассматривается оператор Лапласа с краевым условием Дирихле. Физически такая модель описывает пару квантовых волноводов, соединённых отверстием. Целью исследования было изучения поведения спектра при изменении окна. Было установлено, что увеличение размера окна приводит к увеличению числа собственных значений рассматриваемого оператора. В случае, если данное увеличение описывается вещественным параметром и непрерывно по нему, было показано, что существуют бесконечный набор критических значений данного параметра, при прохождении которых у системы возникают новые собственные значения. Данные собственные значения возникают из края непрерывного спектра. Было установлено необходимое условие критичности формы окна; это условие заключается в наличие нетривиальной резонансной "собственной" функции, связанной с краем непрерывного спектра. Резонансность заключается в определённом поведении данной функции на бесконечности. Было показано, что существует три различных класса резонансных функций. Для одного из них было установлено, что наличие резонансной функции данного класса является одновременно и достаточным условием, гарантирующим критичность формы окна и как следствие – возникновение собственного значения при увеличении окна от критической формы. В этом случае для возникающего собственного значения были вычислены первые члены асимптотического разложения и описаны структура и асимптотическое поведение соответствующей собственной функции. Для получения описанных результатов в данной задаче потребовалось установить вспомогательный результат, который интересен и как независимое утверждение. А именно, была явно описана область определения рассматриваемого оператора и явно описано поведение функций из области определения вблизи края окна.

В работе [5] рассматривалась сингулярно возмущённая эллиптическая система второго порядка во всём пространстве. Коэффициенты системы быстро осциллировали и зависели от быстрых и медленных переменных. По быстрой переменной зависимость предполагалась периодической относительно некоторой решетки. По медленным переменных коэффициенты оператора были достаточно гладкими и ограниченными в определённой норме вместе с конечным числом своих производных. Размерность пространства и размер системы были произвольными. Оператор, описывающий систему, являлся достаточно произвольным самосопряжённым матричным оператором и рассматривался как неограниченный оператор в пространстве L_2. Для этого оператора был выписан усреднённый оператор. В равномерной операторной норме получены первые члены асимптотического разложения для резольвенты возмущённого оператора. Данные результаты были получены для резольвенты, рассматриваемой как оператор в L_2, а также как оператор из L_2 в W_2^1. Как следствие, установлена сходимость спектра. Рассмотренный оператор включает в себя как частные случаи основные операторы математической физики, в частности, оператор Шрёдингера, магнитный оператор Шрёдингера, оператор теории упругости, оператор Паули. Возможно также рассмотрение данных операторов с некоторой нетривиальной метрикой в пространстве.

Работа [6] является продолжением в определённом смысле работы [5]. Здесь для упомянутого выше матричного оператора были построены полные асимптотические разложения собственных значений, сходящиеся к изолированным собственным значениям усреднённого оператора. Также были построены асимптотические разложения для соответствующих собственных функций.

Первоначальная версия работы [7] была подготовлена в период, когда была написана моя заявка на конкурс П. Делиня. Вместе с тем, в 2007 году данная работа была переработана, некоторые из доказательств были сделаны более оптимальными и короткими, и в такой виде статья будет опубликована ещё в текущем году. В данной статье подробно описана новая оригинальная методика, позволяющая решать задачи о нелокальных разбегающихся возмущениях в наиболее общей постановке.

Преподавательская деятельность

В 2007/08 учебном году я читаю курс "Математического анализа" студентам второго курса и спецкурс "Спектральная теория неограниченных операторов" студентам четвёртого, пятого курсов и аспирантам. Курсы читаются на физико-математическом факультете Башкирского государственного педагогического университета.