

# ОТЧЕТ О РАБОТЕ В 2008 Г. И ЗА ВЕСЬ ПЕРИОД 2005–2008 ГГ.

М. РОВИНСКИЙ

Я по-прежнему изучал группы автоморфизмов универсальных областей над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0 и их представления. Контекст, некоторые основные определения и задачи напоминаются ниже, см. §1.

Состояние проекта на начало 2008 года подробно изложено в моей диссертации. Там же зафиксировано множество (достаточно мелких) новых технических результатов. Например, объяснено, как строить полуупростое допустимое двойственное такой группы (что не вполне тривиально, поскольку группа не локально компактна), а также получен аналог свойства «Т» Каждана (это связано с п.5.1).

Из более свежих результатов заслуживает упоминания следующее описание гомотопически инвариантных представлений.

**Теорема 1.** *Гладкое представление гомотопически инвариантно тогда и только тогда, когда гомотопически инвариантны все его неприводимые подфакторы.*

Кроме того, я доказал, что точность функтора  $(-)_v$ , см. п.3.5 ниже, эквивалентна следующему геометрическому утверждению. (Ранее мне было известно только, что это – вещи связанные, и первое сильнее второго.)

**Утверждение 2.** *Для любого неприводимого  $k$ -многообразия  $X$  и любого конечного набора сюрективных морфизмов  $f_j : X \rightarrow Y_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , положительных относительных размерностей индуцированный гомоморфизм групп 0-циклов  $Z_0(X) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^N Z_0(Y_j)$  не инъективен.*

Помимо этого, я попытался изучать некоторые представления проективных групп. (Мотивировку для этого можно найти в начале §5.) Например, я связал дифференциалы на проективной прямой с некоторыми представлениями  $\mathrm{PGL}_2$  «основной серии».

Далее подводятся итоги работы эти три года. Вкратце, хотя и произошли некоторые продвижения по уже стоявшим вопросам, проблем стало заметно больше.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И КОНТЕКСТ РАБОТЫ

Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики,  $F$  – алгебраически замкнутое расширение поля  $k$  не более чем счётной (и как правило счётной) степени трансцендентности  $n$ ,  $1 \leq n \leq \infty$ , и  $G$  – группа автоморфизмов поля  $F$  над  $k$ . На  $G$  рассматривается топология, базис открытых подгрупп которой составляют стабилизаторы конечных подмножеств в  $F$ .

Обозначим через  $\mathcal{Sm}_G$  категорию гладких представлений  $G$  над  $\mathbb{Q}$ , а через  $\mathcal{I}_G$  – категорию гомотопически инвариантных представлений, полную подкатегорию в  $\mathcal{Sm}_G$ , объекты  $W$  которой удовлетворяют условию  $W^{G_{F/L}} = W^{G_{F/L'}}$  для любого чисто трансцендентного подрасширения  $L'/L$  в  $F/k$ .

В описании неприводимых объектов категории  $\mathcal{I}_G$  состоит одна из основных задач, решение которой позволило бы установить точную связь между бирациональными (зависящими только от поля функций) «мотивными» инвариантами и «когомологическими» инвариантами многообразий. Типичный пример такого инварианта – группа Чжоу 0-циклов гладкого проективного многообразия.

Из гипотезы о «мотивности» гомотопически инвариантных представлений, см. [R1], следует, что все бирациональные «мотивные» вопросы можно перевести на язык теории представлений группы  $G$ . В частности, синтез известных гипотез о зависимости структуры группы Чжоу 0-циклов от алгебры регулярных дифференциальных форм на многообразии, переводится как утверждение, что внешняя алгебра кэлеровых дифференциалов содержит все неприводимые гомотопически инвариантные представления.

## 2. СТРУКТУРА ГРУППЫ $G$ И ТЕОРИИ ГАЛУА

**2.1. Максимальные подгруппы в  $G$  и теории Галуа.** Установлена максимальность стабилизаторов собственных алгебраически замкнутых подполей  $F$  конечной степени трансцендентности над  $k$ . Показано, что в случае счётной степени трансцендентности все максимальные собственные открытые подгруппы в  $G$  имеют такой вид. Это мотивировано, в первую очередь, изучением стабилизаторов векторов гладких представлений группы  $G$ , а также классов сопряжённости в  $G$ .

Кроме того, установлена максимальность среди замкнутых собственных подгрупп  $G$  стабилизаторов алгебраически замкнутых подполей  $F$  счётной степени трансцендентности над  $k$ , над которыми степень трансцендентности  $F$  также счётна.

В случае счётной степени трансцендентности, с помощью максимальных собственных открытых подгрупп в  $G$  описаны подгруппы автоморфизмов над промежуточными подполями в  $F/k$ , т.е. построена теория Галуа алгебраически замкнутых расширений счётной степени трансцендентности. Это, хотя и многоступенчатый, но ответ на один из вопросов (вопрос 3b)) из [K, §4] в данном частном случае.

В случае произвольной степени трансцендентности установлена максимальность стабилизаторов дискретных нормирований  $v$  ранга один среди замкнутых собственных подгрупп  $G$ . Это даёт пример неоткрытой замкнутой максимальной собственной подгруппы группы  $G$ .

**2.2. «Локально компактная плотная подгруппа»  $\mathfrak{G}$  группы  $G$ .** Хотя группа  $G$  и не является локально компактной при  $n = \infty$ , некоторые задачи о её гладких представлениях можно свести к задачам о гладких представлениях некоторой локально компактной группы, что бывает удобно. Я построил локально компактную группу  $\mathfrak{G}$  и непрерывный инъективный гомоморфизм из  $\mathfrak{G}$  в  $G$  с плотным образом. А именно, для некоторого выбора базиса трансцендентности  $x_1, x_2, x_3, \dots$  расширения  $F/k$  группа  $\mathfrak{G}$  определена как  $\mathfrak{G} = \bigcup_{m \geq 1} G_{F/L_m}$ , где  $L_m = k(x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$ . (По определению,  $\mathfrak{G} = G$  при  $n < \infty$ .)

Возьмём в качестве базиса открытых подгрупп множество  $\{G_{F|LL_1}\}$ , где  $L$  пробегает подполя в  $F$  конечного типа над  $k$ .

Тогда  $\mathfrak{G}$  локально компактна, но не унимодулярна, включение  $\mathfrak{G}$  в  $G$  непрерывно и с плотным образом.

Геометрически (в смысле, аналогичном [JR]) это соответствует бесконечномерным многообразиям, заданным конечным числом уравнений, морфизмы между которыми не меняют координат с достаточно большими номерами.

Модуль  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{Q}_+^\times$  локально компактной группы  $\mathfrak{G}$  можно описать явно, откуда нетрудно увидеть, что модуль сюръективен.

В частности, группа  $\mathfrak{G}$  не является компактно порождённой ни при каком  $1 \leq n \leq \infty$ .

Сравнение ядра модуля с подгруппой  $\mathfrak{G}^\circ$ , порождённая всеми компактными подгруппами  $\mathfrak{G}$ , является одной из основных задач. Из разложения  $\mathfrak{G} = G_{F/\overline{L_2}} \cdot \mathfrak{G}^\circ$  ясно, что ключевым является случай  $n = 1$ .

**2.3. Сепарабельное замыкание и орбиты некоторой подгруппы.** Описано сепарабельное замыкание чисто трансцендентного расширения алгебраически замкнутого поля степени один в терминах подгруппы, порождённой всеми подгруппами Галуа.

### 3. ГЛАДКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $G$

Как и в случае многих других абелевых категорий, одна из основных задач о категории  $\mathcal{Sm}_G$  состоит в описании классов изоморфизма их неприводимых объектов.

То же относится и к категории  $\mathcal{C}$  гладких полулинейных представлений группы  $G$ . Более того, само изучение категории  $\mathcal{C}$  мотивировано этой задачей.

Простой подсчёт из [R4] показывает, например, что если  $k$  счётно, то в каждой из категорий  $\mathcal{Sm}_G$  и  $\mathcal{C}$  имеется континuum классов изоморфизма неприводимых объектов.

В то же время на данный момент строить явно я умею лишь  $|k|$  неприводимых объектов категории  $\mathcal{Sm}_G$  (соответствующих неприводимым чистым мотивам) и лишь счётное количество неприводимых объектов категории  $\mathcal{C}$  (а именно, прямые слагаемые объекта  $\bigotimes_F^\bullet \Omega_{F/k}^1$ ).

**3.1. Критерии неприводимости и полуупростоты.** Чтобы строить новые примеры неприводимых представлений, требуются какие-нибудь критерии неприводимости. Имеется очевидное обобщение критериев неприводимости и полуупростоты в терминах представлений алгебр Гекке на случай произвольной вполне несвязной топологической группы, см. [R4, JR].

В случае группы  $G$  можно ожидать, что имеет место следующий, более естественный, критерий неприводимости или полуупростоты, см. [R4, JR]. *Гладкое представление  $W$  группы  $G$  неприводимо или полуупросто тогда и только тогда, когда представление  $W^{G_{F/F'}}$  группы  $G_{F'/k}$  неприводимо или полуупросто для каждого алгебраически замкнутого  $F'$  в  $F/k$  конечной степени трансцендентности над  $k$ .* В [R4] это проверено для факторов пространств Чжоу 0-циклов вида  $CH_0(X_F)_\mathbb{Q}$ . Показано также, что этот гипотетический критерий имеет место если и только если подмодули в  $\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{k} F\}]$  ацикличны по отношению к функторам  $H^{>0}(G_{F/F'}, -)$  для любых  $L$  в  $F'/k$  конечного типа над  $k$ .

Среди потенциальных приложений – полуупростота регулярных дифференциальных форм (или когомологий де Рама с компактными носителями). Эта проблема связана с совпадением отношений гомологической и численной эквивалентностями на алгебраических циклах (с точностью до (ко-)кручения).

Пусть  $H_{\mathrm{dR}/k,c}^*(F)$  – образ в когомологиях де Рама  $H_{\mathrm{dR}/k}^*(F)$  предела  $\varinjlim H_{\mathrm{dR}/k}^*(X)$ , где  $X$  пробегает гладкие собственные модели подполей в  $F$  конечного типа над  $k$ .

Получены некоторые результаты о структуре модулей кэлеровых дифференциалов.

В [R4] показано, что представление  $H_{\mathrm{dR}/k,c}^n(F)$  (и в частности, подпредставление регулярных форм старшей степени) полуупросто для любого  $1 \leq n < \infty$ , в предположении (видимо, не очень существенном), что мощность поля  $k$  не превосходит континуума. Вместе с вышеупомянутым критерием полуупростоты это подсказывает, что допустимое представление  $H_{\mathrm{dR}/k,c}^q(F)$  над  $k$  полуупросто для любого  $q \geq 0$ .

**3.2. «Формула Кюннета».** Для каждой пары объектов  $W_1, W_2 \in \mathcal{S}m_G$  определим  $W_1 \otimes_{\mathcal{I}} W_2$  как максимальный факторобъект объекта  $W_1 \otimes W_2$  в категории  $\mathcal{I}_G$ . Операция  $\otimes_{\mathcal{I}}$  не ассоциативна.

Есть основания ожидать, что каноническая сюръекция  $C_{k(X \times_k Y)} \longrightarrow C_{k(X)} \otimes_{\mathcal{I}} C_{k(Y)}$  – изоморфизм для любой пары неприводимых  $k$ -многообразий  $X, Y$ , что можно называть «формулой Кюннета». В случае, когда  $X$  – кривая, «формула Кюннета» доказана в [R4].

Из «формулы Кюннета» следовало бы, что ограничение  $\otimes_{\mathcal{I}}$  на  $\mathcal{I}_G$  – коммутативная ассоциативная тензорная структура, и что класс проективных объектов замкнут относительно  $\otimes_{\mathcal{I}}$ , см. [R1].

**3.3. «Содержание Жордана–Гёльдера» бирациональных типов.** Один из основных инвариантов бирациональных типов над  $k$  – это его  $G$ -модуль общих 0-циклов над  $F$ , и определение его структуры остаётся центральной проблемой в теории гладких представлений группы  $G$ .

**ВОПРОС.** Определяется ли бирациональный тип  $X$   $G$ -модулем общих 0-циклов на  $X_F$ ?

Пусть  $\mathrm{JH}(X)$  – набор классов изоморфизма его неприводимых подфакторов.

Зависимость  $\mathrm{JH}(X)$  от  $X$  представляет из себя интересную задачу. В связи с построенным там примерами, в [R1] поставлен вопрос, является ли  $\mathrm{JH}(X)$  инвариантом примитивного мотива бирационального типа  $X$ ?

В [R4] показано, что  $\mathrm{JH}(X) = \mathrm{JH}(\mathbb{P}_k^{\dim X})$  для произведения  $X$  двойных накрытий проективных пространств, по крайней мере одно из которых – это кривая рода  $\leq 1$ . Это подсказывает, что  $\mathrm{JH}(X)$  зависит только от  $\dim X$  для произвольного  $k$ -многообразия  $X$ . Однако ни проверить это, ни опровергнуть мне до сих пор не удалось.

Вложить  $\mathrm{JH}(X)$  в  $\mathrm{JH}(Y)$  можно, например, с помощью такого конечного над  $X$  соответствия  $X \vdash Y^N$ , что индуцированный морфизм групп 0-циклов  $Z_0(X) \longrightarrow Z_0(Y)^N$  инъективен. Таким образом, контрпример к утверждению 2 задаст вложение  $\mathrm{JH}(X)$  в  $\mathrm{JH}(Y)$ , где  $\dim X > \dim Y$ .

Однако даже из утверждения 2 не следует, что  $\mathrm{JH}(X)$  «больше»  $\mathrm{JH}(Y)$  при  $\dim X > \dim Y$ . Не удается даже построить такое  $k$ -многообразие  $X$ , для которого можно было бы доказать, что  $\mathrm{JH}(X) \neq \mathrm{JH}(\mathbb{P}_k^1)$ . (Очевидно, что набор  $\mathrm{JH}(\mathbb{P}_k^1)$  – наименьший из нетривиальных.)

### 3.4. «Геометрические» представления и когомологии гладких представлений.

Помимо приложений к критериям неприводимости, см. §3.1, вычисление когомологий важно по следующей причине.

С одной стороны, категорию чистых мотивов (построенную Гротендицом при помощи соответствий по модулю численной эквивалентности) можно считать полной подкатегорией категории градуированных представлений группы  $G$  (при  $n = \infty$ ), см. [R1]. С другой стороны, проведённые в [R1] вычисления групп расширений между представлениями, соответствующими чистым мотивам, оказались двойственными гипотетическим группам расширений между чистыми мотивами. Это указывает на возможность извлечения некоторой информации о смешанных мотивах из представлений  $G$ .

С У.Яннзеном, мы установили в [JR] ацикличность некоторого «геометрического» класса гладких представлений  $G$ , а также гомотопически инвариантных представлений. (Ожидается, впрочем, что последние являются «геометрическими».) Кроме того, мы доказали, что когомологические размерности категории  $\mathcal{Sm}_G$  и категории  $\mathcal{C}$  гладких полулинейных представлений  $G$  над  $F$  бесконечны.

Примеры «геометрических» представлений включают  $\bigotimes_F^\bullet \Omega_{F/k}^1$ , или  $A(F)_\mathbb{Q}$  для любой коммутативной алгебраической  $k$ -группы  $A$ , а также  $\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{k} F\}]$  для любого расширения  $L/k$  конечного типа. Однако,  $\ker[\mathbb{Q}[\{L \xrightarrow{k} F\}] \xrightarrow{\deg} \mathbb{Q}]$  «геометрическим» не является.

Наше основное средство – отождествление гладких  $G$ -множеств с пучками на «малом» сайте  $\mathfrak{Dm}_k$ , и интерпретация гладких когомологий как пучковых когомологий Чеха.

Мы показали, что ограничение этой эквивалентности отождествляет

- $\mathcal{Sm}_G$  с категорией пучков  $\mathbb{Q}$ -векторных пространств на  $\mathfrak{Dm}_k$ ;
- $\mathcal{I}_G$  с категорией гомотопически инвариантных пучков на  $\mathfrak{Dm}_k$ .

Однако, хотелось бы уметь строить по гладким представлениям  $G$  более «геометрические» пучки, например, пучки в гладкой топологии на  $k$ .

Это возможно при помощи некоторых функторов  $(-)_v$ , см. п.3.5. Если при этом общий слой  $\mathcal{F}(F)$  получившегося пучка  $\mathcal{F}$  окажется меньше исходного представления, например, нулевым, то это будет означать, что исходное представление было «слишком большим».

### 3.5. Гладкие полулинейные представления $G$ .

Как отмечено выше, неприводимых объектов категории  $\mathcal{C}$  гладких полулинейных представлений группы  $G$  слишком много. Поэтому можно嘗試яться «ограничить» рассматриваемую категорию, например, исходя из потребности описания неприводимых гомотопически инвариантных представлений.

Однако, я показал в [R4], что категория  $\mathcal{C}$  «проста» в том смысле, что в ней нет нетривиальных собственных подкатегорий, замкнутых относительно прямых произведений и подфакторов в  $\mathcal{C}$ .

Впрочем, это не мешает найти «относительно небольшую» категорию полулинейных представлений, содержащую все гомотопически инвариантные представления с расширенными до  $F$  коэффициентами. А именно, с каждым дискретным нормированием  $v$  поля  $F$  ранга 1 можно связать некоторый аддитивный подфунктор  $(-)_v$  забывающего функтора из категории гладких представлений  $G$  в категорию гладких представлений группы разложения  $v$  (т.е. стабилизатора кольца дискретного нормирования  $v$ ), а с его помощью определить собственную аддитивную подкатегорию  $\mathcal{C}_-$  в  $\mathcal{C}$ , объекты  $V$  которой порождаются как  $F$ -векторное пространство решёткой  $V_v$ . Нетрудно видеть, что  $\mathcal{C}_-$  не зависит от  $v$ . Категория  $\mathcal{C}_-$  не содержит «слишком больших» объектов. Например, она не содержит никаких подобъектов объектов вида  $F[G/U]$  ни для какой собственной подгруппы  $U \subset G$ . Проверяется, что функтор  $(-)_v$  – вполне строгий, и сохраняет сюръекции (и, разумеется, инъекции).

**Теорема 3.** *Функтор  $(-)_v$  тождественен на гомотопически инвариантных представлениях.*

С помощью функтора  $(-)_v$  можно надеяться описать наиболее интересные гладкие представления  $G$  как «достаточно функториальные» пучки, т.е. сделать связь представлений с геометрией более явной.

Если функтор  $(-)_v$  точен, то  $\mathcal{C}_-$  – подкатегория Серра категории  $\mathcal{C}$ .

Как упоминалось выше, одна из основных проблем состоит в связи гомотопически инвариантных представлений с кэлеровыми дифференциалами. Последние являются примером допустимых полулинейных представлений.

Категория допустимых полулинейных представлений группы автоморфизмов алгебраически замкнутого расширения счётной степени трансцендентности поля алгебраических чисел – это пример нетривиальной категории полулинейных представлений, которую удаётся полностью описать (и связать с кэлеровыми дифференциалами), см. [R3]. В случае произвольного основного поля также получены предварительные результаты, подтверждающие ожидаемую связь с кэлеровыми дифференциалами.

#### 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $\mathfrak{G}$

Я определил такую полную подкатегорию  $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$  в  $\mathcal{Sm}_{\mathfrak{G}}$ , что забывающий функтор индуцирует эквивалентности категорий  $\mathcal{I}_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$  и  $\mathcal{Adm}_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\mathfrak{G}} \cap \mathcal{Adm}_B$ , где  $\mathcal{Adm}_B$  обозначает категорию допустимых представлений группы  $B$ .

**4.1. Представления, котрагредиентные к мотивным.** Чистые эффективные мотивы (то есть по модулю численной эквивалентности) образуют полную подкатегорию в категории градуированных полупростых допустимых  $G$ -, и следовательно,  $\mathfrak{G}$ -модулей. Заметим, что поскольку категория градуированных полупростых допустимых  $\mathfrak{G}$ -модулей конечной длины самодвойственна, произвольные чистые мотивы (не обязательно эффективные) реализуются в этой категории.

Пусть  $X$  – гладкое собственное  $k$ -многообразие. В [R4] в геометрических терминах описано представление, котрагредиентное к представлению  $B^{\dim X}(X_F)$  (0-циклов на  $X_F$  по модулю «численной эквивалентности над  $k$ »).

**4.2. Примеры полулинейных представлений  $\mathfrak{G}$ .** В [R4] построен некоторый запас полулинейных представлений  $\mathfrak{G}$ .

Скажем, что подмножества  $I$  и  $J$  в  $\mathbb{N}$  соизмеримы, если  $I \setminus (I \cap J)$  конечно, и  $|I \setminus (I \cap J)| = |J \setminus (I \cap J)|$ . Обозначим через  $[I]$  класс подмножеств в  $\mathbb{N}$ , соизмеримых с подмножеством  $I$ . Это – счётное множество.

Определим  $\Omega_{F|k}^{[I]}$  как  $F$ -векторное пространство с базисом  $\{dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{j_3} \wedge \dots \mid J \in [I]\}$ , где  $J = (j_1 < j_2 < j_3 < \dots)$  и  $x_1, x_2, x_3, \dots$  – базис трансцендентности из определения  $\mathfrak{G}$ . Группа  $\mathfrak{G}$  действует на  $\Omega_{F|k}^{[I]}$  естественным образом. Если  $I$  конечно мощности  $q$ , то получается представление  $\Omega_{F|k}^q$ . Если  $I = \mathbb{N}$ , то получается полулинейное представление степени 1. Если  $J = \mathbb{N} \setminus I$ , то имеется невырожденное спаривание  $\Omega_{F|k}^{[I]} \otimes_F \Omega_{F|k}^{[J]} \longrightarrow \Omega_{F|k}^{[\mathbb{N}]}$ , естественное, если зафиксировано  $I \in [I]$ . Из [R2, лемма 7.7] следует, что полулинейное представление  $\Omega_{F|k}^{[I]}$  неприводимо.

Пусть  $M$  – множество таких отображений  $f$  множества  $\mathbb{N}$  в себя, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \infty$ . Определим  $\Omega_{F|k}^M$  как  $F$ -векторное пространство с базисом  $\{dx_{f(1)} \otimes dx_{f(2)} \otimes dx_{f(3)} \otimes \dots \mid f \in M\}$ . Действие  $\mathfrak{G}$  определяется естественным образом. Определим  $\Omega_{F|k}^{[f]}$  как  $F$ -векторное подпространство в  $\Omega_{F|k}^M$ , натянутое на  $\mathfrak{G}$ -орбиту элемента  $dx_{f(1)} \otimes dx_{f(2)} \otimes dx_{f(3)} \otimes \dots$

## 5. ОГРАНИЧЕНИЯ ГЛАДКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НА НЕКОТОРЫЕ ПОДГРУППЫ

Стандартный способ изучать представления группы – это ограничивать их на подгруппу. Проблема в том, что подгруппу надо выбирать так, чтобы её теория представлений была «проще», но ограничения несли хоть какую-то информацию об исходных представлениях. (Например, бессмысленно ограничивать бесконечномерные представления на тривиальную подгруппу.) Гладкие представления бывает удобно ограничивать на компактные подгруппы, поскольку гладкие представления компактных групп полуправильны.

В [R2, R3] гладкие полулинейные представления «ограничивались» на проективные группы над  $k$ , и затем изучались полулинейные представления проективных групп. Поскольку мне удалось описать только конечномерные полулинейные представления проективных групп, в результате получилось описание подкатегории допустимых полулинейных представлений  $G$ .

**5.1. Ограничение гомотопически инвариантных представлений на компактные подгруппы.** Я изучал ограничения гомотопически инвариантных представлений на открытые компактные подгруппы  $K$  локально компактной группы  $\mathfrak{G}$  из §2.2. Например, можно взять «максимальную», то есть с  $F^K$ , порождённым базисом трансцендентности  $F/k$  из определения группы  $\mathfrak{G}$ . Я построил функтор  $\mathcal{S}t_K \longrightarrow \mathcal{I}_G$  и предположил, что

- (i) любое неприводимое гладкое представление группы  $K$  участвует не более чем в конечном числе неприводимых объектов  $\mathcal{I}_G$  (это можно вывести из других гипотез);
- (ii) любой неприводимый объект of  $\mathcal{I}_G$  содержит неприводимое гладкое представление  $\rho$  группы  $K$ , которое не участвует ни в каком другом неприводимом объекте  $\mathcal{I}_G$ ;
- (iii) если неприводимое гладкое представление  $\rho$ , содержится ровно в одном неприводимом объекте  $\mathcal{I}_G$ , то кратность  $\rho$  в этом неприводимом объекте равна единице.

Приведены примеры  $\rho$ , которые участвуют ровно в одном неприводимом объекте  $\mathcal{I}_G$ . Часть (i) выведена из мотивных гипотез и гипотезы, связывающей проективные образующие  $\mathcal{I}_G$  с группами Чжоу 0-циклов и описывающей мотивную фильтрацию в терминах фильтрации уровня на  $G$ -модулях.

**5.2. Ограничения гладких представлений на другие подгруппы.** Описать категорию гладких представлений симметрической группы счётного множества нетрудно. В частности, её неприводимые объекты соответствуют диаграммам Юнга. С другой стороны, категория гладких полулинейных представлений симметрической группы выглядит сложнее (хотя мне известен ровно один, а именно, тривиальный, её неприводимый объект).

Я начал изучать гладкие полулинейные представления  $p$ -адических линейных групп. Достоинство таких групп в том, что они «не так малы», как симметрические, а с другой стороны, известны все их гладкие представления. К тому же, благодаря теореме 90 Гильберта, можно ограничиться лишь сферическими представлениями.

## 6. Статьи и препринты за 2008 год:

- 6.1. Выпущен и подан в печать обновлённый вариант препринта [JR].
- 6.2. Принята статья [R5].
- 6.3. Вышел обзор [R4].

## 7. УЧАСТИЕ В ТРИМЕСТРЕ

«Группы в геометрии» (Центр де Джорджи) 15 сентября — 14 октября, Пиза.

## 8. Статьи и препринты за 2005–2008 годы:

- 8.1. Выпущен и подан в печать обновлённый вариант препринта [JR].
- 8.2. Принята к публикации статья [R5].
- 8.3. Вышли статьи [R3, R4].

## 9. ПРЕПОДАВАНИЕ:

Осенний семестр 2006: «Введение в теорию полей классов».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [JR] U.Jannsen, M. Rovinsky, *Smooth representations and sheaves.* math.AG/0707.3914 v2, submitted.
- [K] W.Krull, *Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs,* J. reine u. angew. Math. **191**, (1953), 54–63.
- [R1] *Motives and admissible representations of automorphism groups of fields.* Math. Zeit., **249** (2005), no. 1, 163–221.
- [R2] *Semilinear representations of PGL,* Selecta Math., **11** (2005), 491–522.
- [R3] *Admissible semi-linear representations,* math.RT/0506043, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) **604** (2007), 159–186.
- [R4] *Группы автоморфизмов полей и их представления.* Успехи матем. наук **62** (2007), вып.6 (378), 87–156. English translation: Automorphism groups of fields, and their representations, Russian Math. Surveys, 62:6 (2007), 1121–1186.
- [R5] *On maximal proper subgroups of field automorphism groups.* math.RT/0601028 v5, accepted to Selecta Math.