отчет о работе в 2007 г.

М. Ровинский

Я изучал представления групп автоморфизмов универсальных областей над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0. Мотивацию для этого можно найти в предыдущем отчете.

0.1. **Основные обозначения.** Пусть k – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, F – алгебраически замкнутое расширение поля k счётной степени трансцендентности и G – группа автоморфизмов поля F над k. На G рассматривается топология, базис открытых подгрупп которой составляют стабилизаторы конечных подмножеств в F. Обозначим через $\mathcal{S}m_G$ категорию гладких представлений G над $\mathbb{Q}$, а через $\mathcal{I}_G$ – полную подкатегорию в $\mathcal{S}m_G$, объекты которой W удовлетворяют условию $W^{G_{F/L}} = W^{G_{F/L'}}$ для любого чисто трансцендентного подрасширения L'/L в F/k.

В описании неприводимых объектов категории $\mathcal{I}_G$ состоит одна из основных задач, решение которой позволило бы установить точную связь между бирациональными «мотивными» инвариантами и «когомологическими» инвариантами.

1. Гладкие представления G

1.1. **Критерии неприводимости и полупростоты.** Имеется очевидное обобщение критериев неприводимости и полупростоты в терминах представлений алгебр Гекке на случай произвольной вполне несвязной топологической группы, см. [R4, JR].

В случае группы G можно ожидать, что имеет место следующий, более естественный, критерий неприводимости или полупростоты, см. [R4, JR]. *Гладкое представление W группы G неприводимо или полупросто тогда и только тогда, когда представление $W^{G_{F/F'}}$ группы $G_{F'/k}$ неприводимо или полупросто для каждого алгебраически замкнутого F' в F/k конечной степени трансцендентности над k.* В [R4] это проверено для факторов пространств Чжоу 0-циклов вида $CH_0(X_F)_{\mathbb{Q}}$. Показано также, что этот гипотетический критерий имеет место если и только если подмодули в $\mathbb{Q}[\{L \overset{/k}{\hookrightarrow} F\}]$ ацикличны по отношению к функторам $H^{>0}(G_{F/F'}, -)$ для любых L в F'/k конечного типа над k.

Простой подсчёт из [R4] показывает, что имеется континуум неприводимых объектов категории $\mathcal{S}m_G$, если k счётно, в то время как на данный момент я умею строить лишь счётное количество неприводимых объектов.

Среди потенциальных приложений – полупростота регулярных дифференциальных форм (или когомологий де Рама с компактными носителями). Эта проблема связана с совпадением отношений гомологической и численной эквивалентностями на алгебраических циклах (с точностью до (ко-)кручения).

Пусть $H^*_{\mathrm{dR}/k,c}(F)$ – образ в когомологиях де Рама $H^*_{\mathrm{dR}/k}(F)$ предела $\varinjlim H^*_{\mathrm{dR}/k}(X)$, где X пробегает гладкие собственные модели подполей в F конечного типа над k.

В [R4] показано, что представление $H^n_{\mathrm{dR}/k,c}(F)$ (и в частности, подпредставление регулярных форм старшей степени) полупросто для любого $1 \leqslant n < \infty$, в предположении (видимо, не очень существенном), что мощность поля k не превосходит континуума. Вместе с вышеупомянутым критерием полупростоты это подсказывает, что допустимое представление $H^q_{\mathrm{dR}/k,c}(F)$ над k полупросто для любого $q \geqslant 0$.

1.2. **«Формула Кюннета».** Для каждой пары объектов $W_1, W_2 \in \mathcal{S}m_G$ определим $W_1 \otimes_{\mathcal{I}} W_2$ как максимальный факторобъект объекта $W_1 \otimes W_2$ в категории $\mathcal{I}_G$. Операция $\otimes_{\mathcal{I}}$ не ассоциативна.

Есть основания ожидать, что каноническая сюръекция $C_{k(X\times_k Y)} \longrightarrow C_{k(X)} \otimes_{\mathcal{I}} C_{k(Y)}$ – изоморфизм для любой пары неприводимых k-многообразий X, Y, что можно называть «формулой Кюннета». В случае, когда X – кривая, «формула Кюннета» доказана в [R4].

Из «формулы Кюннета» следовало бы, что ограничение $\otimes_{\mathcal{I}}$ на $\mathcal{I}_G$ – коммутативная ассоциативная тензорная структура, и что класс проективных объектов замкнут относительно $\otimes_{\mathcal{I}}$, см. [R1].

1.3. **«Содержание Жордана–Гёльдера» бирациональных типов.** Один из основных инвариантов бирациональных типа – это его G-модуль общих 0-циклов над F, и определение его структуры остаётся центральной проблемой в теории гладких представлений группы G.

Вопрос. Определяется ли бирациональный тип X G-модулем общих 0-циклов на X_F?

Пусть $\mathrm{JH}(X)$ – набор классов изоморфизма его неприводимых подфакторов.

Зависимость $\mathrm{JH}(X)$ от X представляет из себя интересную задачу. В связи с построенными там примерами, в [R1] поставлен вопрос, является ли $\mathrm{JH}(X)$ инвариантом примитивного мотива бирационального типа X?

В [R4] показано, что $\mathrm{JH}(X) = \mathrm{JH}(\mathbb{P}^{\dim X}_k)$ для произведения X двойных накрытий проективных пространств, по крайней мере одно из которых – это кривая рода $\leqslant 1$. Это подсказывает, что $\mathrm{JH}(X)$ зависит только от $\dim X$ для произвольного k-многообразия X.

Вложить $\mathrm{JH}(X)$ в $\mathrm{JH}(Y)$ можно, например, с помощью такого соответствия $X \vdash Y^N$, что индуцированный морфизм групп 0-циклов $Z_0(X) \longrightarrow Z_0(Y)^N$ инъективен. Таким образом, чтобы сравнить $\mathrm{JH}(X)$ и $\mathrm{JH}(Y)$, где $\dim X \neq \dim Y$, нужно ответить на следующий геометрический вопрос.

Существуют ли неприводимое k-многообразие X и конечный набор сюръективных морфизмов $f_j : X \longrightarrow Y_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, положительных относительных размерностей такие, что индуцированный гомоморфизм групп 0-циклов $Z_0(X) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^N Z_0(Y_j)$ инъективен?

Если да (что выглядит не очень правдоподобно), то набор $\mathrm{JH}(X)$ не зависит от X для произвольного k-многообразия X: $\mathrm{JH}(X) = \mathrm{JH}(\mathbb{P}^1_k)$.

1.4. Φ_G **и когомологии гладких представлений.** С У.Яннсеном, мы установили в [JR] ацикличность некоторого «геометрического» класса гладких представлений G, а также объектов категории $\mathcal{I}_G$. Кроме того, мы доказали, что когомологические размерности категории $\mathcal{S}m_G$ и категории $\mathcal{C}$ гладких полулинейных представлений G над F бесконечны.

Примеры «геометрических» представлений включают $\bigotimes_F^{\bullet}\Omega^1_{F/k}$, или $A(F)_{\mathbb{Q}}$ для любой коммутативной алгебраической k-группы A, а также $\mathbb{Q}[\{L \overset{/k}{\hookrightarrow} F\}]$ для любоого раширения L/k конечного типа. Однако, $\ker[\mathbb{Q}[\{L \overset{/k}{\hookrightarrow} F\}] \xrightarrow{\deg} \mathbb{Q}]$ «геометрическим» не является.

Наше основное средство – отождествление гладких G-множеств с пучками на «малом» сайте $\mathfrak{Dm}_k$, и интерпретация гладких когомологий как пучковых когомологий Чеха.

Мы показалим что ограничение этой эквивалентности отождествляет

- $\mathcal{S}m_G$ с категорией пучков $\mathbb{Q}$-векторных пространств на $\mathfrak{Dm}_k$;
- $\mathcal{I}_G$ с категорией гомотопически инвариантных пучков на $\mathfrak{Dm}_k$.

Однако, хотелось бы уметь строить по гладким представлениям G более «геометрические» пучки, например, пучки в гладкой топологии на k.

Это возможно при помощи некоторых функторов $(-)_v$, связанных с дискретными нормированиями v поля F. При этом может, впрочем, случиться, что общий слой $\mathcal{F}(F)$ получившегося пучка $\mathcal{F}$ – нулевой.

1.5. **Полулинейные представления.** Я показал в [R4], что категория $\mathcal{C}$ «проста» в том смысле, что в ней нет нетривиальных собственных подкатегорий, замкнутых относительно прямых произведений и подфакторов в $\mathcal{C}$.

В [R4] также показано, что в категории $\mathcal{C}$ имеется несчетное количество классов изоморфизма неприводимых объектов, в то время как строить явно я умею лишь счетное их количество (а именно, только прямые слагаемые $\bigotimes_F^{\bullet}\Omega^1_{F/k}$). Поэтому можно пытаться «ограничить» рассматриваемую категорию. Однако, я показал в [R4], что категория $\mathcal{C}$ «проста» в том смысле, что в ней нет нетривиальных собственных подкатегорий, замкнутых относительно прямых произведений и подфакторов в $\mathcal{C}$.

2. «Локально компактная плотная подгруппа» $\mathfrak{G}$ группы G

Гораздо удобнее иметь дело с локально компактными группами. Хотя группа G и не является локально компактной, некоторые задачи о её гладких представлениях можно свести к задачам о гладких представлениях некоторой локально компактной группы. Я построил локально компактную группу $\mathfrak{G}$, и непрерывный инъективный гомоморфизм из $\mathfrak{G}$ в G с плотным образом. А именно, для некоторого выбора базиса трансцендентности $x_1, x_2, x_3, \dots$ расширения F/k группа $\mathfrak{G}$ определена как $\mathfrak{G} = \bigcup_{m\geqslant 1} G_{F/L_m}$, где $L_m = k(x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$.

Возьмём в качестве базиса открытых подгрупп множество $\{G_{F|LL_1}\}$, где L пробегает подполя в F конечного типа над k.

Тогда $\mathfrak{G}$ локально компактна, но не унимодулярна, включение $\mathfrak{G}$ в G непрерывно и с плотным образом, и $\mathfrak{G} = G_{F/\overline{L_2}} \cdot \mathfrak{G}^\circ$.

Геометрически (в смысле, аналогичном [JR]) это соответствует бесконечномерным многообразиям, заданным конечным числом уравнений, морфизмы между которыми не меняют координат с достаточно большими номерами.

Модуль $\chi = \chi_{\mathfrak{G}} : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathbb{Q}_+^\times$ можно описать явно, откуда нетрудно увидеть, что χ сюръективен.

В частности, группа $\mathfrak{G}$ не является компактно порождённой ни при каком $1 \leqslant n \leqslant \infty$.

Я определил такую полную подкатегорию $\mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$ в $\mathcal{S}m_{\mathfrak{G}}$, что забывающий функтор индуцирует эквивалентности категорий $\mathcal{I}_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\mathfrak{G}}$ и $\mathcal{A}dm_G \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\mathfrak{G}} \cap \mathcal{A}dm_{\mathfrak{G}}$, где $\mathcal{A}dm_B$ обозначает категорию допустимых представлений группы B.

2.1. **Представления, котрагредиентные к мотивным.** Чистые эффективные мотивы (то есть по модулю численной эквивалентности) образуют полную подкатегорию в категории градуированных полупростых допустимых G-, и следовательно, $\mathfrak{G}$–модулей. Заметим, что поскольку категория градуированных полупростых допустимых $\mathfrak{G}$-модулей конечной длины самодвойственна, произвольные чистые мотивы (не обязательно эффективные) реализуются в этой категории.

Пусть X – гладкое собственное k-многообразие. В [R4] в геометрических терминах описано представление, котрагредиентное к представлению $B^{\dim X}(X_F)$ (0-циклов на X_F по модулю «численной эквивалентности над k»).

2.2. **Примеры полулинейных представлений $\mathfrak{G}$.** В [R4] построен некоторый запас полулинейных представлений $\mathfrak{G}$.

Скажем, что подмножества I и J в $\mathbb{N}$ соизмеримы, если $I \smallsetminus (I \cap J)$ конечно, и $|I \smallsetminus (I \cap J)| = |J \smallsetminus (I \cap J)|$. Обозначим через $[I]$ класс подмножеств в $\mathbb{N}$, соизмеримых с подмножеством I. Это – счётное множество.

Определим $\Omega^{[I]}_{F|k}$ как F-векторное пространство с базисом $\{dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{j_3} \wedge \dots \mid J \in [I]\}$, где $J = (j_1 < j_2 < j_3 < \dots)$ и $x_1, x_2, x_3, \dots$ – базис трансцендентности из определения $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}$ действует на $\Omega^{[I]}_{F|k}$ естественным образом. Если I конечно мощности q, то получается представление $\Omega^q_{F|k}$. Если $I = \mathbb{N}$, то получается полулинейное представление степени 1. Если $J = \mathbb{N} \smallsetminus I$, то имеется невырожденное спаривание $\Omega^{[I]}_{F|k} \otimes_F \Omega^{[J]}_{F|k} \longrightarrow \Omega^{[\mathbb{N}]}_{F|k}$, естественное, если зафиксировано $I \in [I]$. Из [R2, лемма 7.7] следует, что полулинейное представление $\Omega^{[I]}_{F|k}$ неприводимо.

Пусть M – множество таких отображений f множества $\mathbb{N}$ в себя, что $\lim\limits_{m\to\infty} f(m) = \infty$. Определим $\Omega^M_{F|k}$ как F-векторное пространство с базисом $\{dx_{f(1)} \otimes dx_{f(2)} \otimes dx_{f(3)} \otimes \dots \mid f \in M\}$. Действие $\mathfrak{G}$ определяется естественным образом. Определим $\Omega^{[f]}_{F|k}$ как F-векторное подпространство в $\Omega^M_{F|k}$, натянутое на $\mathfrak{G}$-орбиту элемента $dx_{f(1)} \otimes dx_{f(2)} \otimes dx_{f(3)} \otimes \dots$

3. Ограничения гладких представлений на некоторые подгруппы

Стандартный способ изучать представления группы – это ограничивать их на подгруппу. Проблема в том, что подгруппу надо выбирать так, чтобы ее теория представлений была «проще», но ограничения несли хоть какую-то информацию об исходных представлениях. (Например, бессмысленно ограничивать бесконечномерные представления на тривиальную подгруппу.) В случае гладких представлений удобно выбирать компактные подгруппы, поскольку их представления полупросты.

В [R2, R3] гладкие полулинейные представления «ограничивались» на проективные группы над k, и затем изучались полулинейные представления проективных групп. Поскольку мне удалось описать только конечномерные полулинейные представления проективных групп, в результате получилось описание подкатегории *допустимых* полулинейных представлений G.

3.1. **Ограничение объектов $\mathcal{I}_G$ на компактные подгруппы.** Я изучал ограничения «гомотопически инвариантных» представлений на открытые компактные подгруппы K локально компактной группы $\mathfrak{G}$ из §2. Например, можно взять «максимальную», то есть с F^K, порождённым базисом трансцендентности F/k из определения группы $\mathfrak{G}$. Я построил функтор $\mathcal{S}m_K \longrightarrow \mathcal{I}_G$ и предположил, что

(i) любое неприводимое гладкое представление группы K участвует не более чем в конечном числе неприводимых объектов $\mathcal{I}_G$ (это можно вывести из других гипотез);

(ii) любой неприводимый объект of $\mathcal{I}_G$ содержит неприводимое гладкое представление ρ группы K, которое не участвует ни в каком другом неприводимом объекте $\mathcal{I}_G$;

(iii) если неприводимое гладкое представление ρ, содержится ровно в одном неприводимом объекте $\mathcal{I}_G$, то кратность ρ в этом неприводимом объекте равна единице.

Приведены примеры ρ, которые участвуют ровно в одном неприводимом объекте $\mathcal{I}_G$. Часть (i) выведена из мотивных гипотез и гипотезы, связывающей проективные образующие $\mathcal{I}_G$ с группами Чжоу 0-циклов и описывающей мотивную фильтрацию в терминах фильтрации уровня на G-модулях.

3.2. **Ограничения гладких представлений на другие подгруппы.** Описать категорию гладких представлений симметрической группы счетного множества нетрудно. В частности, ее неприводимые объекты соответствуют диаграммам Юнга. С другой стороны, категория гладких *полулинейных* представлений симметрической группы выглядит сложнее (хотя мне известен ровно один, а именно, тривиальный, ее неприводимый объект).

Я начал изучать гладкие полулинейные представления p-адических линейных групп. Их достоинство в том, что они «не так малы», как симметрические, а с другой стороны, известны все их гладкие представления. К тому же, можно ограничиться лишь сферическими представлениями.

4. Статьи и препринты:

4.1. **Выпущены препринты** [JR, R5]**.**

4.2. **Выходит обзор** [R4]**.**

4.3. **Вышла статья** [R3].

Список литературы

[JR] U.Jannsen, M. Rovinsky, *Smooth representations and sheaves.* `math.AG/0707.3914`.

[R1] *Motives and admissible representations of automorphism groups of fields.* Math. Zeit., **249** (2005), no. 1, 163–221.

[R2] *Semi-linear representations of PGL,* Selecta Math., **11** (2005), 491–522.

[R3] *Admissible semi-linear representations,* `math.RT/0506043`, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) **604** (2007), 159–186.

[R4] *Группы автоморфизмов полей и их представления.* Успехи матем. наук **62** (2007), вып.6 (378), 87–156.

[R5] *On maximal proper subgroups of field automorphism groups.* `math.RT/0601028 v4`.