Отчет о работе в 2006 г.

М. Ровинский

1 Научная работа

1.1 Контекст работы

Мотивы

Идея алгебраической теории когомологий возникла в 40-х годах у А.Вейля в связи с подсчётом рациональных точек на многообразиях над конечными полями. Такая (этальная) теория когомологий была построена Гротендиком (совместно с М.Артином), и им же было предположено существование универсальной теории когомологий со значениями в некоторой абелевой категории, названной им категорией мотивов. Гротендик построил некоторую категорию (чистых мотивов), которая задаёт теорию когомологий для гладких проективных многообразий, при условии выполнения «стандартных» гипотез. Яннзен доказал, что, как и предполагал Гротендик, эта категория абелева и полупроста. В моей статье в Math.Zeit., 249 (2005), no. 1, 163–221 показано, что категорию чистых мотивов можно считать полной подкатегорией категории некоторых представлений топологической группы G автоморфизмов алгебраически замкнутых расширений полей, см. ниже.

Дальнейшее развитие «теория (смешанных) мотивов», до сих пор во многом гипотетическая, получила в работах Делиня, Блоха и Бейлинсона. В частности, они изучали «ходжевы реализации» мотивов. Фундаментальный результат Делиня состоит в существовании некоторой канонической структуры (структуры Ходжа) на сингулярных когомологиях любого алгебраического комплексного многообразия. В частности, они представляются как последовательные расширения прямых слагаемых когомологий некоторых гладких проективных комплексных многообразий, «чистых структур Ходжа». Проведённые в loc.cit. вычисления групп расширений между представлениями, соответствующими чистым мотивам, оказались двойственными гипотетическим группам расширений между чистыми мотивами, что указывает на возможность извлечения некоторой информации о смешанных мотивах из представлений G.

На данный момент теория Ходжа не настолько развита, чтобы в её терминах описывать категорию мотивов. Однако, попытка построения мотивов с помощью наборов «конкретных» теорий когомологий, была предпринята Делинем и

Яннзеном. Основные проблемы этого подхода связаны с недоказанностью таких («немотивных», т.е. привязанных к конкретным теориям когомологий) гипотез, как гипотезы Ходжа и Тейта.

Наконец, в работах В.Воеводского, М.Левина, Ш.Сайто... были построены триангулированные категории, которые должны быть производными категориями абелевой категории мотивов. Как показал А.Бейлинсон, эта абелева категория мотивов может быть построена, если имеют место «стандартная» гипотеза о полупростоте и гипотеза Блоха–Бейлинсона о мотивной фильтрации.

Из гипотезы о «мотивности» «гомотопически инвариантных» представлений, см. loc.cit., следует, что все «бирациональные» мотивные вопросы, т.е. те из них, которые зависят только от поля функций многообразия, можно перевести на язык теории представлений группы G. Типичный пример такого вопроса – структура группы Чжоу 0-циклов гладкого проективного многообразия, а точнее, её зависимость от алгебры регулярных дифференциальных форм на этом многообразии. Если формулировать эту проблему в терминах представлений G, то требуется показать, что модуль кэлеровых дифференциалов содержит все неприводимые «гомотопически инвариантные» представления.

Группы автоморфизмов полей и их представления

Группы автоморфизмов неалгебраических расширений полей изучались мало, а их представления изучались ранее только в специальных случаях (таких как теория представлений алгебраических групп и групп точек алгебраических групп над разнообразными кольцами), в особенности в теории автоморфных представлений, но не в случае группы автоморфизмов алгебраически замкнутых расширений. Из самых ранних работ, вторая из которых мотивирована изучением полей автоморфных функций, упомяну

N.Jacobson, **Lectures in abstract algebra. Vol III: Theory of fields and Galois theory.** D. Van Nostrand Co., 1964;

И.И.Пятецкий-Шапиро, И.Р.Шафаревич, *Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация,* Изв. АН СССР, сер. матем. **30** (1966), 671–704.

Простота некоторых из таких групп установлена в работе D.Lascar, *The group of automorphisms of the field of complex numbers leaving fixed the algebraic numbers is simple.* Model theory of groups and automorphism groups, 110–114, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 244, Cambridge Univ. Press, 1997.

1.2 Содержание работы

1. Как упоминалось выше, одна из основных проблем состоит в связи «гомотопически инвариантных» представлений с кэлеровыми дифференциалами. Последние являются примером допустимых полулинейных представлений.

В [3] полностью описана категория допустимых полулинейных представлений группы автоморфизмов алгебраически замкнутого расширения счётной степени трансцендентности поля алгебраических чисел. В случае произвольного основного поля также получены предварительные результаты, подтверждающие ожидаемую связь с кэлеровыми дифференциалами.

2. Если F/k – расширение полей, то имеются отображения: из множества промежуточных подполей в F/k во множество замкнутых подгрупп в $\mathrm{Aut}(F/k)$, $K \mapsto \mathrm{Aut}(F/K)$, и из множества замкнутых подгрупп в $\mathrm{Aut}(F/k)$ во множество промежуточных подполей в F/k, $H \mapsto F^H$, которые в случае расширения Галуа – взаимно обратные биекции.

а) Описано сепарабельное замыкание чисто трансцендентного расширения алгебраически замкнутого поля степени один в терминах подгруппы, порождённой всеми подгруппами Галуа.

б) Пусть k – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, F – алгебраически замкнутое расширение поля k не более чем счётной степени трансцендентности, и G – группа автоморфизмов поля F над k. На G рассматривается топология, базис открытых подгрупп которой составляют стабилизаторы конечных подмножеств F.

Установлена максимальность стабилизаторов собственных алгебраически замкнутых подполей F конечной степени трансцендентности над k. Показано, что в случае счётной степени трансцендентности все максимальные собственные открытые подгруппы в G имеют такой вид. Это мотивировано, в первую очередь, изучением стабилизаторов векторов гладких представлений G.

В случае счётной степени трансцендентности, с помощью максимальных собственных открытых подгрупп в G описаны подгруппы G, фиксирующие некоторое промежуточное подполе, т.е. построена теория Галуа алгебраически замкнутых расширений счётной степени трансцендентности. Это – ответ на один из вопросов из статьи W.Krull, *Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs,* J. reine u. angew. Math. 191, (1953), 54–63.

в) В случае произвольной степени трансцендентности установлена максимальность стабилизаторов G_v дискретных нормирований v ранга один. Это даёт пример неоткрытых замкнутых максимальных собственных подгрупп G.

3. Получены некоторые результаты о структуре модулей кэлеровых дифференциалов такие, как полупростота подмодуля регулярных форм старшей (конечной, разумеется) степени.

4. Для каждого дискретного нормирования построен вполне строгий подфунктор $(-)_v : \mathcal{S}m_G \longrightarrow \mathcal{S}m_{G_v}$ забывающего функтора из категории гладких представлений G в категорию гладких представлений стабилизатора G_v дискретного нормирования, сохраняющий сюръекции и инъекции. С его помощью можно надеяться описать наиболее интересные гладкие представления G как «достаточно функториальные» пучки, т.е. сделать связь представлений с геометрией более

явной.

Это требуется, в частности, для того, чтобы найти «небольшую» категорию полулинейных представлений, содержащую все «гомотопически инвариантные» представления с расширенными коэффициентами. Если функтор $(-)_v$ точен, то можно найти такую категорию, которая «существенно меньше» категории всех гладких полулинейных представлений.

2 Выпущены следующие препринты:

[1] *Representations of field automorphism groups,* `math.RT/0507388 v2`.
[2] *On maximal proper subgroups of field automorphism groups,* `math.RT/0601028`.

3 Принята к публикации статья:

[3] *Admissible semi-linear representations,* `math.RT/0506043`, J. reine und angew. Math. (Crelle).

4 Преподавание:

Осенний семестр 2006: «Введение в теорию полей классов».