ОТЧЕТ

по гранту Пьера Делиня

П.С. Колесников
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

5 декабря 2007 г.

1. Публикации по проекту за 2007 г.

1. Universally defined representations of Lie conformal superalgebras, *Journal of Symbolic Computation*, doi: 10.1016/j.jsc.2007.02.004, to appear.
2. Associative algebras related to conformal algebras, *Applied Categorical Structures*, doi: 10.1007/s10485-007-9077-4, to appear.
3. Varieties of dialgebras and conformal algebras, arXiv:math/0611501.
4. Conformal representations of Leibniz algebras, arXiv:0708.2315.

Из числа приведенных в отчете за 2006 г. вышла из печати работа «On the Wedderburn principal theorem in conformal algebras», *J. Algebra and Its Appl.*, **6** (2007), no. 1, 119–134.

Препринт «An embedding of a dialgebra into an associative conformal algebra», ArXiv: math/0611501, полностью переработан с обобщением результатов.

2. Краткое описание новых результатов, полученных в рамках проекта

Введено понятие универсально определенного представления конформной (супер)алгебры Ли. Свойство универсальной определенности зависит от выбора системы порождающих такой алгебры. В некотором смысле, эти представления являются «самыми простыми»: они однозначно заданы определяющими соотношениями исходной (супер)алгебры Ли и значениями функции локальности образов порождающих элементов в соответствующей ассоциативной обертывающей. Описаны универсально определенные представления для конформных супералгебр Ли серии W_n.

Рассмотрен класс (ассоциативных) алгебр линейных преобразований бесконечномерного линейного пространства, связанных с конформными алгебрами. В частности, такими алгебрами являются алгебры Вейля дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Получены результаты о строении (полу)первичных алгебр этого класса, обобщающие классические теоремы Веддерберна для конечномерного пространства.

Введено общее понятие многообразия диалгебр, соответствующего данному многообразию (обычных) алгебр над полем. Это определение полностью согласуется с ранее введенными в работах различных авторов понятиями ассоциативной, альтернативной, коммутативной диалгебры. Диалгебры Ли в этом смысле — это в точности алгебры Лейбница. Показано, что любая диалгебра многообразия Var вкладывается каноническим образом в конформную алгебру многообразия Var.

В частности, для алгебр Лейбница введено понятие конформного представления и показано, что любая (конечномерная) алгебра Лейбница имеет точное конформное представление (конечного типа). Более того, любая алгебра Лейбница вкладывается в конформную алгебру петель над обычной алгеброй Ли.

3. Развернутое изложение результатов

В работе [1] введено понятие универсально определенного представления конформной (супер)алгебры Ли, и исследованы такие представления для простых конформных супералгебр Ли серий W_n, K_n [FK].

Одно из основных отличий конформных (супер)алгебр Ли от обычных алгебр этого типа является отсутствие единой универсальной обертывающей ассоциативной конформной алгебры. Но если зафиксировать множество порождающих элементов и рассмотреть класс ассоциативных обертывающих с ограничением на значения функции локальности на образах этих порождающих, то в этом классе существует универсальный объект [Ro2].

Таким образом, вместо одной универсальной обертывающей в случае конформных алгебр необходимо рассматривать решетку универсальных обертывающих, соответствующих всевозможным наборам значений функции локальности на порождающих элементах.

Поскольку универсальные обертывающие конформные алгебры задаются посредством определяющих соотношений, для их исследования целесообразно применять лемму о композиции для конформных алгебр [BFK].

Одной из важнейших задач теории конформных (супер)алгебр Ли является описание представлений конечного типа. Нами выделен класс представлений, являющихся наиболее простыми с комбинаторной точки зрения.

Именно, любое неприводимое представление конечного типа конформной (супер)алгебры C соответствует простому гомоморфному образу некоторой ассоциативной конформной алгебры из решетки универсальных обертывающих. Поэтому наибольший интерес представляют (ненулевые) универсальные обертывающие, являющиеся простыми конформными алгебрами (классификация таких алгебр проведена в [Ko1]).

Определение 1. Представление конформной (супер)алгебры Ли C, соответствующее простой универсальной обертывающей, называется *универсально определенным.*

Универсально определенные представления характеризуются тем, что их строение полностью определяется минимальным набором данных — коммутационными соотношениями исходной (супер)алгебры Ли и набором значений функции локальности на порождающих элементах. Для случая обычных алгебр это понятие не имеет непосредственного аналога.

Исследованы универсально определенные представления для конформных супералгебр Ли серии W_n, $n \geq 0$. Конформная супералгебра W_n порождена формальными степенными рядами

$$v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n \partial_t z^{-n-1}, \quad \xi_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n \xi_i \partial_t z^{-n-1}, \quad \partial_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n \partial_{\xi_i} z^{-n-1}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

с коэффициентами в $\mathrm{Der}\,(\Bbbk[t, t^{-1}] \otimes \bigwedge_n)$, где $\bigwedge_n = \Bbbk\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \mid \xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0\rangle$ — алгебра Грассмана, ∂_{ξ_i} — нечетное дифференцирование по ξ_i.

Теорема 2. *Универсально определенные представления конформной супералгебры W_n соответствуют функциям локальности N_1, N_2, заданным следующими таблицами:*

$N_1(x,y)$

x	y						
	v	ξ_1	$\dots$	ξ_n	∂_1	$\dots$	∂_n
v	2	2	$\dots$	2	2	$\dots$	2
ξ_1	2	0	$\dots$	2	2	$\dots$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
ξ_n	2	2	$\dots$	0	2	$\dots$	2
∂_1	1	1	$\dots$	1	0	$\dots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
∂_n	1	1	$\dots$	1	1	$\dots$	0

$N_2(x,y)$

x	y						
	v	ξ_1	$\dots$	ξ_n	∂_1	$\dots$	∂_n
v	2	2	$\dots$	2	1	$\dots$	1
ξ_1	2	0	$\dots$	2	1	$\dots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
ξ_n	2	2	$\dots$	0	1	$\dots$	1
∂_1	2	2	$\dots$	2	0	$\dots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
∂_n	2	2	$\dots$	2	1	$\dots$	0

Таким образом, при $n = 0$ универсально определенное представление единственно, а при $n > 0$ таких представлений существует ровно два.

Также найдены базисы Гребнера — Ширшова универсальных обертывающих, соответствующих найденным представлениям.

Показано, что для $n = 1$ оба этих представления индуцируют одно представление конформной супералгебры Невью — Шварца $K_1 \subset W_1$, которое снова является универсально определенным, а для $n \geq 2$ соответствующие индуцированные представления супералгебр $K_n \subset W_n$ не являются универсально определенными.

* * *

В работе [2] рассматривается приложение структурных результатов [Ko1] к описанию некоторого «хорошего» класса алгебр линейных преобразований бесконечномерного пространства.

Пусть A — (хаусдорфова) топологическая алгебра над полем $\Bbbk$ характеристики нуль, снабженная попарно коммутирующими непрерывными дифференцированиями $\partial_1, \dots, \partial_n$. Линейное отображение $a : H = \Bbbk[T_1, \dots, T_n] \to A$ назовем T-инвариантным, если

$$a\frac{\partial}{\partial T_i} = \partial_i a, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим через $\mathcal{F}(A)$ множество всех T-инвариантных отображений $H \to A$, непрерывных относительно T-адической топологии на H.

Если B — подпространство в A, то через $\mathcal{F}(B)$ обозначим множество всех B-значных отображений из $\mathcal{F}(A)$. Если C — подмножество в $\mathcal{F}(A)$, то через $\mathcal{A}(C)$ обозначим множество

$$\mathcal{A}(C) = \{a(f) \mid a \in C,\ f \in H\}.$$

Очевидно, $B \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}(B))$, $\mathcal{F}(\mathcal{A}(C)) \supseteq C$.

Определение 3. Топологическая алгебра A с непрерывными дифференцированиями ∂_i, $i = 1, \dots, n$, называется *TC-алгеброй* (от «translation invariance», «continuity»), если $A = \mathcal{A}(\mathcal{F}(A))$.

Примерами TC-алгебр являются сама алгебра многочленов H, соответствующая алгебра Пуассона (если n четно), алгебра Вейля, алгебра Витта, ее классические лиевы подалгебры S_n и H_n. Формально говоря, любая алгебра является TC-алгеброй при $n = 0$.

Рассмотрим TC-алгебру A над $\Bbbk[T]$ $(n = 1)$ такую, что $A \subseteq \operatorname{End} M$, где M — конечно-порожденный H-модуль, рассматриваемый как бесконечномерное линейное пространство над $\Bbbk$ относительно конечной топологии, причем

$$\partial(a) = [a, T], \quad a \in A,$$

Теорема 4. (i) *Если A первичная, то либо $A \simeq \mathbb{M}_n(H)$, либо $A \simeq \mathbb{M}_n(A_1)Q(p)$, где A_1 — первая алгебра Вейля, $A_1 = \Bbbk\langle p, q \mid [q, p] = 1\rangle$, $Q \in \mathbb{M}_n(\Bbbk[p])$, $\det Q \neq 0$.*

(ii) *Если A полупервичная, то A представляется в виде прямой суммы первичных из (i).*

(iii) *Радикал Джекобсона $J(A)$ алгебры A нильпотентен.*

Теорема об отщеплении радикала для таких алгебр верна в случае, когда $A/J(A)$ содержит единицу [Ko2]. Заметим, что обычное присоединение единицы к TC-алгебре выводит ее из класса TC-алгебр.

* * *

В исследованиях гомологической теории алгебр Ли возникло естественное определение некоммутативной алгебры Ли (алгебры Лейбница) [L1]. При изучении алгебр Лейбница возникают алгебраические системы (диалгебры) с двумя бинарными операциями $\dashv$ и $\vdash$, удовлетворяющими некоторым аксиомам. Последние, как правило, выбираются из апостериорных соображений с тем, чтобы получить «некоммутативную» картину, аналогичную той, что наблюдается в случае алгебр Ли. Таковы, например, ассоциативные [L2] и альтернативные [LD] диалгебры, perm-алгебры [CF].

В работах [3, 4] установлено, что диалгебры всех указанных классов тесно связаны с конформными алгебрами (более общо, псевдоалгебрами) соответствующих многообразий. Это позволяет ввести общее определение многообразия диалгебр при помощи понятия операды [GK].

Предложение 5. *Пусть* Dialg_0 *— операда, соответствующая многообразию диалгебр, определенному тождествами $(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z$, $x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z)$. Тогда имеет место эквивалентность операд* Dialg_0 *и* $\mathrm{Alg} \otimes E$, *где* Alg *— операда бинарных деревьев, E — операда конечномерных векторных пространств.*

Определение 6. Пусть Var — однородное многообразие алгебр, заданное семейством полилинейных тождеств, VarAlg — соответствующая операда [GK]. Тогда многообразие Var-*диалгебр* определим как многообразие алгебр, соответствующих операде $\mathrm{VarAlg} \otimes E$.

Это определение позволяет в явном виде выписать тождества диалгебр, определяющие данное многообразие. В частности, понятия ассоциативных и альтернативных алгебр эквивалентны введенным ранее в [L2, LD], класс диалгебр Ли в точности совпадает с классом алгебр Лейбница [L1], коммутативных диалгебр — с классом perm-алгебр [CF]. Более того, доказана следующая

Теорема 7. *Любая* Var-*диалгебра вкладывается в подходящую псевдоалгебру многообразия* Var.

Этот результат позволяет использовать понятия теории псевдоалгебр (точнее, конформных алгебр) для изучения диалгебр и, в частности, алгебр Лейбница.

Определение 8. *Конформным представлением* алгебры Лейбница L на $\Bbbk[T]$-модуле M называется гомоморфизм из L в ассоциативную диалгебру, построенную на алгебре $\operatorname{Cend} M$ конформных эндоморфизмов модуля M. Если M —

конечно-порожденный $\Bbbk[T]$-модуль, то представление называется *конечным* (или *конечного типа*).

Доказано следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы Адо для алгебр Лейбница.

Теорема 9. *Любая (конечномерная) алгебра Лейбница имеет точное (конечное) конформное представление.*

Немедленными следствиями этой теоремы являются следующие результаты.

Следствие 10. *Любая (конечномерная) алгебра Лейбница вкладывается в конформную алгебру петель над обыкновенной (конечномерной) алгеброй Ли.*

Это означает, что любая конечномерная алгебра Лейбница L вкладывается в алгебру матриц $\mathbb{M}_n(\Bbbk[x])$ (например, при $n = \dim L + 1$) так, что $[a(x)b(x)] = a(0)b(x) - b(x)a(0)$.

Следствие 11 (PBW-теорема для алгебр Лейбница [L2, AG])**.** *Универсальная обертывающая ассоциативная диалгебра для алгебры Лейбница L изоморфна $U(L^{\mathrm{alg}}) \otimes L$, как линейное пространство где L^{alg} — наибольший лиев образ алгебры L.*

4. Педагогическая деятельность

На кафедре Алгебры и математической логики Механико-математического факультета НГУ в 2007/2008 учебном году мною читается годовой специальный курс «*Алгебра-3*». Курс рассчитан на студентов и аспирантов. Рассматриваются дополнительные главы алгебры, не входящие в основной курс алгебры на ММФ НГУ: универсальная алгебра, теория решеток, булевых алгебр, алгебр Ли, представления конечных групп.

Литература

[AG] Aymon M., Grivel P.-P. Un théorème de Poincaré—Birkhoff—Witt pour les algèbres de Leibniz, Comm. Algebra **31** (2003) no. 2, 527–544.

[BFK] Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F. Composition-Diamond lemma for associative conformal algebras, J. Algebra **272** (2004), no. 2, 739–774.

[CF] Chapoton F. Un endofoncteur de la catégorie des opérades, in: Dialgebras and Related Operads, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1763, pp. 105–110. Springer Verl., Berlin, 2001.

[FK] Fattori D., Kac V. G. Classification of finite simple Lie conformal superalgebras, J. Algebra **258** (2002) no. 1, 23–59.

[GK] Ginzburg V., Kapranov M. Kozul duality for operads, Duke Math. J. **76** (1994) no. 1, 203–272.

[Ko1] Kolesnikov P.S., Associative conformal algebras with finite faithful representation, Adv. Math. 202 (2006) no. 2, 602–637.

[Ko2] Kolesnikov P. S. On the Wedderburn principal theorem in conformal algebras, J. Algebra and Its App., **6** (2007) no. 1, 119–134.

[LD] Liu D. Steinberg—Leibniz algebras and superalgebras, J. Algebra **283** (2005) no. 1, 199–221.

[L1] Loday J.-L., Algebrès ayant deux operations associatives (digèbres), C. R. Acad. Sci. Paris 321 (1995) 141–146.

[L2] Loday J.-L., Dialgebras, in: Dialgebras and Related Operads, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1763, pp. 7-66. Springer Verl., Berlin, 2001.

[Ro2] Roitman M. Universal enveloping conformal algebras, Sel. Math., New Ser., **6** (2000) no. 3, 319–345.