Решения.

I. *Каждая задача оценивалась в 10 баллов.*

1. (*Из протокола Кишиневской гимназии за* 1879 *г.*) Три мужа — Андрей, Иван и Степан пошли со своими женами — Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по столько рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил на 23 вещи больше Анны, Иван — на 11 вещей больше Екатерины, а Степан — на 23 вещи меньше Ольги. Определите, кто на ком женат, если каждый из мужей потратил на 63 рубля больше, чем его жена.

Ответ: Андрей женат на Ольге, Иван — на Анне, Степан — на Екатерине.

Решение. Из условия задачи следует, что каждый из шести человек потратил количество рублей, являющееся квадратом натурального числа. Пусть муж потратил a^2 рублей, а его жена — b^2, тогда $a^2 - b^2 = 63 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 3^2 \cdot 7$. Так как числа $a+b$ и $a-b$ — натуральные, и $a+b > a-b$, то возможны ровно три случая:

1) $\begin{cases} a+b=63, \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=32, \\ b=31. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a+b=21, \\ a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12, \\ b=9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a+b=9, \\ a-b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8, \\ b=1. \end{cases}$

Проверяя условия, связанные с количеством купленных вещей, получим, что требуемые равенства выполняются в единственном случае: $a = 32$ (Андрей), $b = 9$ (Анна); $a = 12$ (Иван), $b = 1$ (Екатерина); $a = 8$ (Степан), $b = 31$ (Ольга).

Критерии проверки:

Верные решение и ответ, но есть мелкие недочеты в обоснованиях — **9** *баллов*

При решении перебором получен верный ответ, после чего оставшиеся случаи не рассмотрены — **7** *баллов*

Верно составлены системы уравнений и записан верный ответ, но решение систем и отбор вариантов не приведены — **6** *баллов*

Окончательный ответ не получен, но приведено рассуждение, исключающее другие составы супружеских пар, кроме искомого случая и еще одного — **5** *баллов*

Ответ не получен, но обоснованно исключен ряд невозможных случаев — **4** *балла*

Приведен только ответ — **0** *баллов*

2. (*Фольклор*) Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x+y)^5 = z, \\ (y+z)^5 = x, \\ (z+x)^5 = y. \end{cases}$

Ответ: $(0;0;0)$; $\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}; \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}; \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}; -\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}; -\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right)$.

Решение.

Первый способ. $\begin{cases} (x+y)^5 = z \\ (y+z)^5 = x \\ (z+x)^5 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt[5]{z} \\ y+z = \sqrt[5]{x} \\ z+x = \sqrt[5]{y} \end{cases}$. Вычтем из первого уравнения второе: $x - z = \sqrt[5]{z} - \sqrt[5]{x} \Leftrightarrow x + \sqrt[5]{x} = z + \sqrt[5]{z}$. Функция $f(t) = t + \sqrt[5]{t}$ является возрастающей (сумма возрастающих функций), поэтому каждое свое значение она принимает ровно при одном значении переменной. Следовательно, $x = z$. Аналогично, из второго и третьего уравнений системы получим, что $x = y$. Подставляя $x = y = z$ в любое из уравнений исходной системы, получим, что $32x^5 = x \Leftrightarrow x = 0$ или $x = \pm\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

Второй способ. Подставим во второе уравнение значение y из третьего уравнения: $((x+z)^5 + z)^5 = x$. Рассмотрим функцию $f(x) = (x+z)^5$. Тогда полученное уравнение можно переписать в виде: $f(f(x)) = x$. Для каждого значения z функция $f(x)$ возрастает при всех значениях x, поэтому $f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x$ $(*)$. Таким образом, $(x+z)^5 = x = (y+z)^5$. Так как функция $f(t) = t^5$ — также возрастающая, то $x + z = y + z \Leftrightarrow x = y$. Из аналогичных соображений вытекает, что $y = z$. Таким образом, все решения исходной системы имеют вид $x = y = z$.

$(*)$ *Доказывается это, например, так*: 1) *Для любой функции* $f(x)$ *верно, что* $f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = x$. 2) *Пусть* x_0 — *решение уравнения* $f(f(x)) = x$, *где* $f(x)$ — *возрастающая функция, то есть,* $f(f(x_0)) = x_0$. *Предположим, что* $f(x_0) \neq x_0$, *например,* $f(x_0) > x_0$. *Тогда,* $f(f(x_0)) > f(x_0)$, *значит,* $x_0 > f(x_0)$ — *противоречие. Аналогично доказывается, что случай* $f(x_0) < x_0$ *также невозможен. Поэтому* $f(f(x_0)) = x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$.

Замечание. Для убывающих функций сформулированное утверждение неверно! *Достаточно, например, рассмотреть функцию* $f(x) = -x$.

Третий способ. Вычтем из первого уравнения второе: $(x+y)^5 - (y+z)^5 = z - x \Leftrightarrow (x-z)((x+y)^4 + (x+y)^3(y+z) + (x+y)^2(y+z)^2 + (x+y)(y+z)^3 + (y+z)^4) = z - x$. Из полученного равенства следует, что $z = x$ или $(x+y)^4 + (x+y)^3(y+z) + (x+y)^2(y+z)^2 + (x+y)(y+z)^3 + (y+z)^4 = -1$.

Докажем, что второе равенство невозможно. Для этого покажем, что при всех значениях переменной выполняется неравенство $(x+y)^4 + (x+y)^3(y+z) + (x+y)^2(y+z)^2 + (x+y)(y+z)^3 + (y+z)^4 \geqslant 0$. Действительно, пусть $x + y = a$, $y + z = b$. При $b = 0$ неравенство верно. При $b \neq 0$ преобразуем левую часть неравенства, вынося за скобки b^4: $b^4\left(\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1\right)$. Пусть $\frac{a}{b} = t$. Многочлен $P(t) = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ при $t \geqslant 0$ принимает только положительные значения. Он положителен также и при $t \leqslant -1$, так как $P(t) = t^3(t+1) + t(t+1) + 1$, и при $-1 < t < 0$, так как $P(t) = t^4 + t^2(t+1) + (t+1)$.

Таким образом возможен только случай $z = x$. Вычитая из второго уравнения системы третье, аналогично получаем, что $x = y$. Таким образом, все решения исходной системы имеют вид $x = y = z$.

Решения, использующие уже описанные идеи, можно оформить и по-другому, например, если сразу сделать замену переменных: $x + y = a$, $y + z = b$, $z + x = c$.

Критерии проверки:

Верные решение и ответ, но есть мелкие недочеты в обоснованиях — **9** *баллов*

Верный ход рассуждений и верный ответ, но не обоснована либо положительность одного из множителей при разложении разности пятых степеней, либо переход от равенства $x + \sqrt[5]{x} = y + \sqrt[5]{y}$ *к равенству* $x = y$ — **8** *баллов*

Верный ход решения, но в концовке потеряна тройка отрицательных чисел — **8** *баллов*

Верный ответ получен, исходя из предположения, что $x = y = z$, *но этот факт никак не доказан* — **2** *балла*

3. (VII *международный турнир городов*) Про функцию $f(x)$ известно, что при любом действительном x выполняется равенство: $f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0$. Может ли $f(x)$ быть непрерывной функцией?

Ответ: нет, не может.

Решение. Запишем данное равенство в виде $f(x+1)(f(x)+1) = -1$.

Первый способ. Из этого равенства следует, что $f(x)$ ни при каких значениях переменной не может принимать значений 0 и 1. Следовательно, если существует непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию, то область ее значений целиком лежит в одном из трех промежутков: а) $(-\infty; -1)$; б) $(-1; 0)$; в) $(0; +\infty)$. В случаях а) и в) множители $f(x+1)$ и $f(x)+1$ имеют одинаковые знаки, а случае б) $|f(x+1)| < 1$ и $|f(x)+1| < 1$, поэтому произведение этих модулей не может быть равно $+1$.

Полученное противоречие показывает, что $f(x)$ не может быть непрерывной.

Второй способ. Пусть $f(0) = c$. Заметим, что $c \neq 0$. Действительно, если $f(0) = 0$, то при $x = 1$ полученное равенство не выполняется. Аналогично, $c \neq -1$, так в противном случае равенство не выполняется при $x = 0$. Рассмотрим теперь три случая:

1) $c > 0$. Тогда при $x = 0$ $f(1) = -\dfrac{1}{c+1} < 0$. Таким образом, на концах отрезка $[0; 1]$ функция принимает значения разных знаков. Если бы $f(x)$ являлась непрерывной, то, нашлось бы такое $t \in (0; 1)$, что $f(t) = 0$. Но тогда при $x = t - 1$ исходное равенство выполняться не будет.

2) $c < -1$. Тогда $f(0) = c < 0$ и $f(1) = -\dfrac{1}{c+1} > 0$ и далее повторим рассуждение пункта 1).

3) $-1 < c < 0$. Тогда $f(0) = c > -1$ и $f(1) = -\dfrac{1}{c+1} < -1$. Если предположить, что $f(x)$ непрерывна, то найдется $t \in (0; 1)$ такое, что $f(t) = -1$. Но тогда при $x = t$ исходное равенство вновь выполняться не будет.

Критерии проверки:

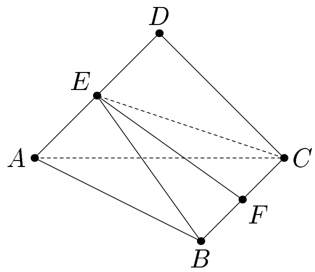
Рассмотрен один случай из трех возможных — **3** *балла*

Указано, только, что функция не может принимать значения 0 *или* -1, *из чего сделан вывод о том, что функция не является непрерывной* — **0** *баллов*

4. (*Канадская математическая олимпиада* 1983 г.) Известно, что площади четырех граней одного тетраэдра соответственно равны площадям граней другого тетраэдра. Верно ли, что объемы этих тетраэдров равны?

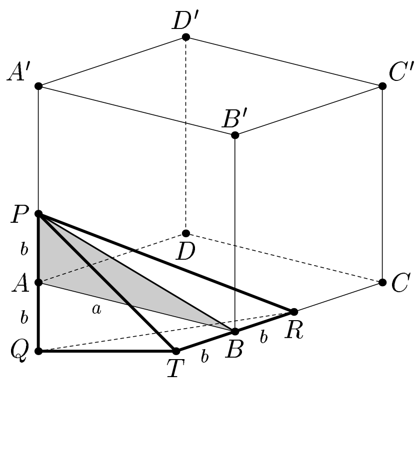
Ответ: нет, не верно.

Решение. В этой задаче при вычислении объемов тетраэдров удобно использовать формулу $V = \dfrac{1}{6}abd\sin\varphi$, где a и b — длины скрещивающихся ребер, d и φ — расстояние и угол между прямыми, содержащими эти ребра, соответственно (*ее доказательство — см., например, Я.П. Понарин. Элементарная геометрия, т.* 2, *стр.* 98 – 99).



Первый способ. Рассмотрим правильный тетраэдр с ребром 1. Площадь каждой его грани равна $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, а объем тетраэдра равен $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Рассмотрим теперь равногранный тетраэдр $DABC$, каждой гранью которого является равнобедренный треугольник с основанием $\dfrac{1}{2}$ и высотой $\sqrt{3}$ (см. рис.). Такой тетраэдр существует, так как такие треугольники — остроугольные (боковая сторона треугольника равна $\dfrac{7}{4}$). Расстояние EF между меньшими скрещивающимися ребрами тетраэдра равно $\sqrt{BE^2 - BF^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{47}}{4}$, поэтому его объем равен $\dfrac{\sqrt{47}}{96}$. Таким образом, площади граней двух тетраэдров равны, а их объемы различны.



Второй способ. Рассмотрим следующую конструкцию: куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром длины a, в котором на ребрах AA' и BC выберем точки P и R на одинаковом расстоянии от вершин A и B соответственно. Кроме того, рассмотрим точки Q и T, симметричные выбранным относительно A и B (см. рис.). Пусть $AP = AQ = BR = BT = b$.

Тетраэдр $PQRT$ является равногранным, так как $PQ = RT = 2b$, $PR = PT = QT = QR$ (из симметрии), поэтому площадь каждой из его граней равна: $S = \dfrac{1}{2} \cdot 2b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = b\sqrt{a^2 + b^2}$.

Объем этого тетраэдра: $V_{PQRT} = \dfrac{1}{6}(2b)^2 a \sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{3}b^2 a$.

Подберем значения a и b так, чтобы значения S были одинаковы, а значения V — различны. Например: 1) при $a = 2$, $b = 3$ $S = 3\sqrt{13} = \sqrt{117}$; $V = 12$; 2) при $a = 2\sqrt{29}$, $b = 1$ $S = \sqrt{117}$; $V = \frac{4\sqrt{29}}{3}$. Таким образом, площади граней двух тетраэдров равны, а их объемы различны.

Критерии проверки:

Приведен верный ответ и построен контрпример, использующий равногранные тетраэдры, но не обосновано, что тетраэдр с выбранными размерами существует (не показано, что грани — остроугольные треугольники) — **8** *баллов*

Приведен верный ответ и высказаны некоторые разумные соображения, но решение не доведено до конца — **2–3** *балла*

II. Методический блок

Каждое задание оценивалось в 10 баллов.

В предложенных текстах (заданиях №5 и №6) могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так и в ответах, решениях или доказательствах). Если утверждение неверно — приведите контрпример и найдите ошибки в доказательстве. Если неверно только решение (доказательство) — укажите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

5. (*Задача из экзаменационного сборника С. Шестакова для* 9 *класса*, 2006 *г.*, *работа* 15, *вариант* 4. *Предложил — А. Хачатурян*).

Условие. Игорь и Паша могут покрасить забор за 4 часа, Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 9 часов. За какое время мальчики покрасят забор, работая втроём?

«Решение». Пусть производительности мальчиков равны соответственно i, p и v заборов в час. Тогда, по условию задачи, $i + p = \frac{1}{4}$, $p + v = \frac{1}{12}$ и $i + v = \frac{1}{9}$. Складывая эти равенства, находим, что $2(i + p + v) = \frac{4}{9}$, откуда $i + p + v = \frac{2}{9}$. Следовательно, мальчики покрасят забор за $\frac{1}{i+p+v} = 4,5$ часа.

Комментарий. В «решении» ошибок нет, но полученный ответ показывает, что, работая втроем, мальчики потратят на покраску забора больше времени, чем Игорь и Паша, работая вдвоем, значит производительность Володи выражается отрицательным числом. Следовательно, **числа в условии задачи подобраны неправильно**.

К такому же выводу можно прийти, если полностью решить составленную систему уравнений: $i = \frac{5}{36}$; $p = \frac{1}{9}$; $\boldsymbol{v = -\frac{1}{36}}$.

Критерии проверки:

Вместо вывода о некорректности условия задачи (в целом) указывается, что в условии надо поменять одно конкретное значение — **8** *баллов*

Доказано, что $v < 0$, *но не сделан вывод* — **8** *баллов*

Найдено противоречие между условием и решением, но сделан неверный вывод об ошибочности решения — **4** *балла*

6. (*Предложил — Д. Шноль*)

«Теорема». Если внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ существует такая точка K, что треугольники ABK, BCK, CDK и ADK равновелики, то такой четырехугольник является параллелограммом.

«Доказательство». Прежде чем доказывать утверждение теоремы докажем вспомогательное утверждение.

«Лемма». Пусть на разных сторонах угла A взяты точки B и C, а точка M — середина отрезка BC. Тогда луч AM является геометрическим местом точек K, обладающих следующим свойством: треугольники ABK и ACK — равновелики.

«Доказательство леммы».

I. Докажем, что если точка K принадлежит лучу AM, то соответствующие треугольники равновелики. Возможны три случая:

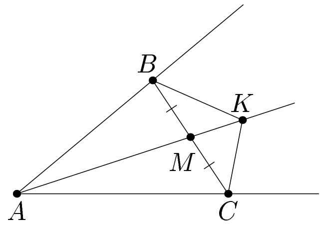


Рис. 1

1) Точка M лежит между A и K (см. рис. 1).

Тогда отрезки AM и KM являются медианами треугольников ABC и BCK соответственно, значит, они делят их площади пополам. Площадь треугольника ABK является суммой площадей треугольников ABM и BMK, аналогично, площадь треугольника AKC является суммой площадей треугольников ACM и CMK. Следовательно, треугольники ABK и ACK — равновелики.

2) Точка K лежит между A и M, тогда в доказательстве, приведенном выше следует сумму площадей заменить на разность.

3) Если точки M и K совпадают, то утверждение очевидно.

II. Докажем обратное утверждение.

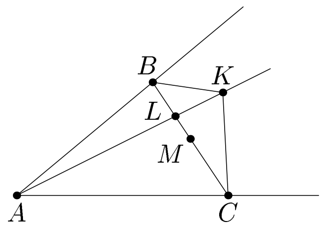


Рис. 2

Пусть точка K обладает тем свойством, что треугольники ABK и ACK — равновелики. Докажем, что точка K лежит на луче AM. Предположим противное. Тогда луч AK пересекает отрезок BC в точке L, не совпадающей с точкой M — серединой отрезка BC (см. рис. 2). Пусть, например, $BL < LC$. Тогда, очевидно, площадь треугольника ABL меньше площади треугольника ACL, а площадь треугольника BKL меньше площади треугольника CKL. Следовательно, площадь треугольника ABK меньше площади треугольника ACK, значит, наше предположение неверно.

Случаи, когда точка K лежит между точками A и L или же K совпадает с точкой L доказываются (как и в первой части доказательства) аналогичными рассуждениями.

Лемма доказана. Перейдем теперь к доказательству теоремы.

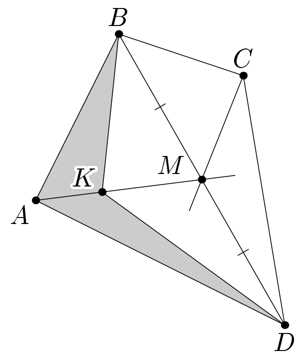
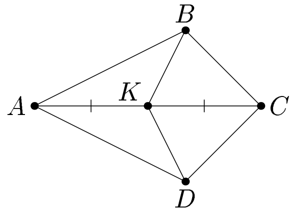


Рис. 3

Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ и проведем его диагональ BD (см. рис. 3). По условию теоремы треугольники ABK и ADK равновелики, значит, согласно доказанной лемме, точка K должна лежать на луче AM, где M — середина диагонали BD. Аналогичным образом, точка K должна лежать и на луче CM, то есть точка K должна совпадать с их точкой пересечения — с точкой M.

Аналогично доказывается, что точка K должна совпадать с серединой диагонали AC. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ середины диагоналей совпадают. Значит, он является параллелограммом что и требовалось доказать.

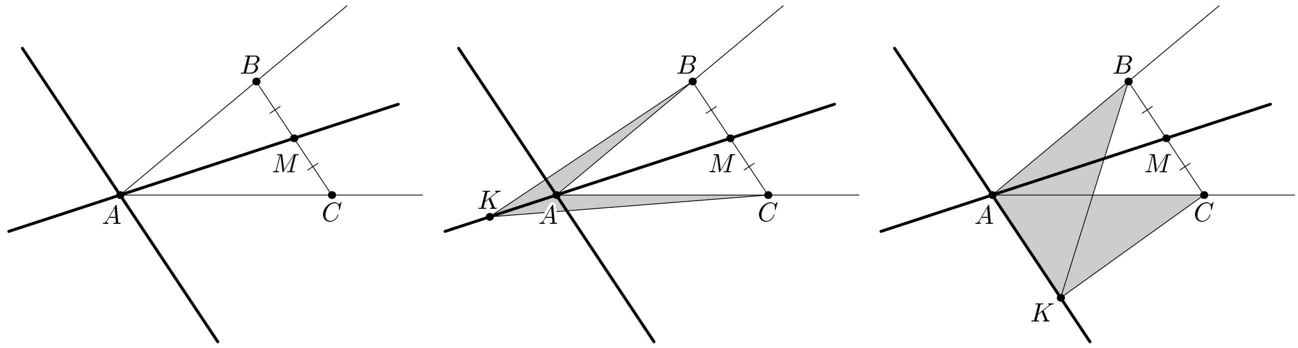
Комментарий. 1) Утверждение «теоремы» неверно.



Контрпримером является дельтоид $ABCD$ (см. рис.), где K — середина диагонали AC. В таком четырехугольнике $\triangle ABC = \triangle ADC$, а отрезки BK и DK — медианы этих треугольников.

2) Утверждение «леммы» также неверно.

Указанное ГМТ представляет собой объединение двух прямых: прямой, содержащей отрезок AM, и прямой, проходящей через точку A параллельно BC (см. рис.).

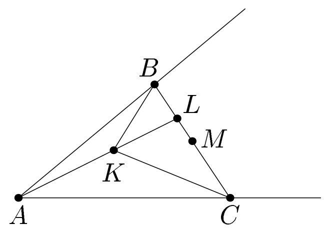


Утверждение леммы станет верно, если ее сформулировать следующим образом:

«Пусть на разных сторонах угла A взяты точки B и C, а точка M — середина отрезка BC. Тогда луч AM является геометрическим местом точек K, **лежащих внутри угла** A и обладающих следующим свойством: треугольники ABK и ACK — равновелики».

3) «Доказательство леммы» содержит **две** ошибки. Первая заключается в том, что рассмотрен только случай, когда точка K расположена внутри угла. Эту ошибку можно «устранить» сформулировав лемму, как показано выше. Вторая ошибка аналогичным образом не устраняется. Во второй части «доказательства», в конце, утверждается, что «Случаи, когда точка K лежит между точками A и L или же K совпадает с точкой L доказываются (как и в первой части доказательства) аналогичными рассуждениями».

На самом деле аналогичное рассуждение в этом случае (в отличие доказательства в первой части) не проходит. А именно, из того, что «площадь треугольника ABL меньше площади треугольника ACL, а площадь треугольника BKL меньше площади треугольника CKL» **не следует**, что площадь треугольника ABK меньше площади треугольника ACK (см. рис.), и никакого противоречия мы не получим (из того, что $a < b$ и $c < d$, не следует, что $a - c < b - d$).



4) «Доказательство» теоремы содержит следующую ошибку. Из того, что точка должна лежать на лучах AM и CM не следует, что она должна **совпадать** с точкой M. Возможен случай, когда лучи AM и CM лежат на одной прямой. В этом случае точка K должна лежать на общей части лучей AM и CM, что и реализуется в дельтоиде.

Критерии проверки:

Общая оценка суммировалась по четырем показателям:

1) *указано, что «теорема» неверна и приведен контрпример* — **3** *балла*

2) *указана ошибка в доказательстве теоремы* — **2** *балла*

3) *указано, что «лемма» неверна и объяснено почему* — **3** *балла*

4) *указана ошибка в доказательстве леммы* — **2** *балла*

7. (*Предложил — В. Гуровиц*) На школьной математической олимпиаде ученикам была предложена задача: «Петя выписал все делители числа $2^8 \cdot 3^{10}$. Каждые два числа, имеющие общий делитель, больший 1, он соединил линией. Сколько линий нарисовал Петя?». Приводим решения двух учеников. Оцените каждое из решений и полученные ответы. Укажите все ошибки и недочеты.

Решение Саши. Всего делителей у Петиного числа $9 \cdot 11 = 99$ (двойка может входить в любой степени от 0 до 8, а тройка в любой степени от 0 до 10). Если их все попарно соединить линиями, то всего линий получится $\dfrac{99 \cdot 98}{2}$.

Подсчитаем, какие из этих линий являются лишними. Лишние линии соединяют пары взаимно простых чисел. Такие пары образуют числа, в разложение которых не входит двойка, с числами, в разложение которых не входит тройка. То есть, числа, являющиеся степенями двойки, с числами, являющимися степенями тройки. Степени двойки — это $1, 2, \ldots, 2^8$ — всего 9 штук, аналогично, степеней тройки — 11 штук. Всего пар взаимно простых чисел будет $9 \cdot 11 = 99$. Поэтому всего линий будет $\dfrac{99 \cdot 98}{2} - 99 = 99 \cdot 48 = 4752$.

Решение Алены. Нарисуем круги Эйлера. В первый круг поместим все те из выписанных чисел, которые делятся на 2, а во второй — все числа, делящиеся на 3. Тогда всего в первом круге будет $8 \cdot 11 = 88$ чисел, во втором круге $9 \cdot 10 = 90$ чисел, а в пересечении этих кругов $8 \cdot 10 = 80$ чисел. Любые два числа в первом круге соединены линией — итого в нем $\dfrac{88 \cdot 87}{2}$ линий. И любые два числа во втором круге соединены линией — итого в нем $\dfrac{90 \cdot 89}{2}$ линий. Те линии, которые находятся в пересечении этих кругов, мы посчитали дважды. Линий, посчитанных дважды, будет $\dfrac{80 \cdot 79}{2}$. Поэтому всего линий будет $44 \cdot 87 + 45 \cdot 89 - 40 \cdot 79 = 4673$.

Комментарий. Решение Алёны — верное. В решении Саши есть две ошибки: во-первых, при подсчете линий, соединяющих степени двойки со степенями тройки он посчитал линию, соединяющую $2^0 = 1$ и $3^0 = 1$, а каждый делитель исходного числа выписывался ровно один раз. Во-вторых (и это основная ошибка!), Саша, подсчитывая «лишние» линии, «забыл» про линии, которые соединяют 1 с числами, делящимися и на 2 и на 3 (по условию задачи такие линии не были проведены, поэтому их также нужно учесть).

Подсчитаем действительное количество «лишних» линий в Сашином решении. Чисел, делящихся и на 2 и на 3 будет $8 \cdot 10 = 80$ (двойка может входить в любой степени от 1 до 8, а тройка в любой степени от 1 до 10). Следовательно, «лишних» линий, на самом деле, $98 + 80 = 178$. Это количество и должен был вычесть Саша из общего количества линий. Таким образом, Петя нарисовал $\dfrac{99 \cdot 98}{2} - 178 = 4673$ линий. Этот ответ совпадает с ответом Алёны.

Критерии проверки:

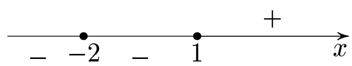
Верно указаны ошибки в Сашином решении, а решение Алены никак не оценено — **6** *баллов*

Верно указана основная ошибка в Сашином решении, но при ее исправлении допущена новая ошибка, из-за чего решение Алены также объявлено неверным — **3** *балла*

Указана только одна ошибка в Сашином решении — **2** *балла*

8. (*Предложил — А. Блинков*) 1) Для контрольной работы в 10 классе по теме «Решение неравенств методом интервалов» придумайте и запишите неравенство, решением которого является объединение числового промежутка и точки. Запишите полное решение придуманного неравенства в том виде, в каком Вы бы хотели его увидеть в работе Вашего ученика.
2) Придумайте еще три равноценных задания (для остальных трёх вариантов контрольной работы), запишите их, и приведите к ним ответы.

Комментарий. 1) Например, «Решите неравенство $(x-1)(x+1)^2 \geqslant 0$, используя метод интервалов». Его решение может быть оформлено примерно так:



Рассмотрим функцию $f(x) = (x-1)(x+1)^2$. Она определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, так как является многочленом; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ или $x = 1$. Определим знаки значений функции на каждом из промежутков ее знакопостоянства (см. рис.). Таким образом, $f(x) \geqslant 0$ при $x = -2$ или $x \geqslant 1$. <u>Ответ</u>: $\{-2\} \cup [1; +\infty)$.

2) $(x+1)^2(x-2) \geqslant 0$. <u>Ответ</u>: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.
$(x+2)(x-1)^2 \leqslant 0$. <u>Ответ</u>: $(-\infty; -2] \cup \{1\}$.
$(x-2)^2(x+1) \leqslant 0$. <u>Ответ</u>: $(-\infty; -1] \cup \{2\}$.

Критерии проверки:

Общая оценка суммировалась из следующих показателей:

1) *придумано задание, соответствующее условию —* **4** *балла*

приведена ***полная*** *запись решения* ***методом интервалов*** *—* **3** *балла (в частности, за отсутствие ссылки на непрерывность рассматриваемой функции снимался* **1** *балл)*

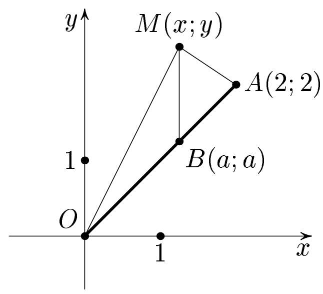
2) *приведены еще* ***три равноценных задания*** *и верные* ***ответы*** *к ним —* **3** *балла*

9. (*Предложил — Д. Шноль*) Владимир Иванович предложил ученикам 11 класса задачу из вступительных экзаменов в один из ВУЗов: «При каком **наименьшем** значении a уравнение $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=2a$ имеет решения?».

Однако ученики не смогли её решить, и даже не приблизились к решению. Тогда учитель сказал: «Прежде чем решать эту сложную задачу, решите последовательно несколько других задач, и тогда с этой задачей вы тоже справитесь», после чего раздал ребятам некоторый список вспомогательных задач.

1) Запишите наиболее рациональное (на Ваш взгляд) решение этой задачи.

2) Составьте список вспомогательных задач.



Комментарий. 1) Левая часть уравнения представляет собой сумму расстояний от точки $M(x;y)$ до точек $O(0;0)$, $A(2;2)$ и $B(a;a)$ (см. рис.). Из неравенства треугольника следует, что сумма этих расстояний не может быть меньше длины отрезка OA, которая равна $2\sqrt{2}$. Таким образом, должно выполняться неравенство $2a \geqslant 2\sqrt{2}$.

При этом, равенство возможно только в том случае, когда точка M лежит на отрезке OA и расстояние от нее до точки B равно нулю, то есть в случае, когда точки M и B совпадают. Рассмотрим наименьшее значение a, удовлетворяющее записанному неравенству: $a=\sqrt{2}$. В этом случае точка $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$ действительно лежит на отрезке OA, поэтому $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ будет являться решением уравнения. Ответ: при $a=\sqrt{2}$.

2) В предлагаемом списке задач, на наш взгляд, должны быть в той или иной степени отражены следующие идеи:

а) перевод текста задачи на геометрический язык;

б) наименьшее значение суммы $MA+MB$ достигается, если точка M лежит на отрезке AB;

в) переход от случая двух слагаемых к случаю трех слагаемых;

г) связь между наличием решения и наличием минимума рассматриваемой функции;

д) различные роли параметра a в левой и правой частях уравнения.

Приводим один из возможных списков.

1. На плоскости дан отрезок AB, длина которого равна 1, и произвольная точка M. Какие значения может принимать сумма длин отрезков AM и BM?

2. На координатной плоскости даны точки $O(0;0)$, $A(3;4)$ и произвольная точка M.

А) Какие значения может принимать сумма длин отрезков OM и AM?

Б) Где должна располагаться точка M, чтобы эта сумма принимала наименьшее значение?

3. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=2\sqrt{5}$.

4. Принадлежит ли точка $C(2;3)$ отрезку AB, если $A(1;1)$ и $B(101;201)$?

5. На координатной плоскости даны точки $O(0;0)$, $A(5;10)$, $B(2;4)$, и произвольная точка M (возможно совпадающая с одной из данных точек). Где должна располагаться точка M, чтобы сумма $OM+AM+BM$ была минимальной?

6. При каком наименьшем значении b уравнение
$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=b$ имеет решения? Найдите их.

Критерии проверки:

Общая оценка суммировалась из следующих показателей:

1) *приведено полное и рациональное решение —* **5** *баллов*

2) *за реализацию в приведенном списке каждой из перечисленных идей — по* **1** *баллу*

Вариант подготовили: А. Блинков, А. Горская, В. Гуровиц, А. Иванищук, А. Мякишев, А. Хачатурян, Д. Шноль.