

# ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ: ОПЫТ ПРОВЕДЕНИЯ КРУЖКА

Корчемкина Татьяна

## Идея кружка

- ▶ Участники — 9–10 класс, базовые знания — школьная программа 8 класса (некоторые знают про вписанные углы после кружка прошлого года)
- ▶ Кружок про движения (поворот, симметрия, параллельный перенос, ...) и преобразования (гомотетия, инверсия, ...) плоскости
- ▶ Можно ли (и как?) рассказать про это не слишком сложно?

## Темы занятий

1. Параллельный перенос — центральная симметрия — поворот — осевая симметрия — скользящая симметрия — возможно, теорема Шаля  
или
  2. Осевая симметрия — центральная симметрия — поворот — параллельный перенос — скользящая симметрия — возможно, теорема Шаля
- ▶ Примерно раз в месяц — игра
  - ▶ Не больше одного–двух «фокусов» в листике одного занятия

## «Фокусы» движений

1) «Следи за руками» (сохранение сторон и углов)

- ▶ На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник  $AEB$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $CED$ , если  $AB = 1$ .
- ▶ Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $P$ . Из вершины  $A$  опущен перпендикуляр на  $BP$ , из  $B$  — перпендикуляр на  $CP$ , из  $C$  — на  $DP$ , из  $D$  — на  $AP$ . Докажите, что все четыре перпендикуляра или их продолжения пересекаются в одной точке.

## Особые «фокусы»

2) При центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей (или в себя)

- ▶ Дан параллелограмм  $ABCD$  и точка  $X$ . Через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  проведены прямые, параллельные прямым  $CX$ ,  $DX$ ,  $AX$  и  $BX$  соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.
- ▶ Точка  $M$  — середина стороны  $AB$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ . Оказалось, что площадь треугольника  $CMD$  равна половине площади  $ABCD$ . Докажите, что  $BC \parallel AD$ .

## Особые «фокусы»

### 3) Центральная симметрия и окружности

- ▶ Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $AOB$  и  $COD$ , касаются.
- ▶ Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  радиуса 1 касаются в точке  $A$ ; центр  $O$  окружности  $\omega$  радиуса 2 принадлежит  $\omega_1$ . Окружность  $\omega_1$  касается  $\omega$  в точке  $B$ . Докажите, что прямая  $AB$  проходит через точку пересечения окружностей  $\omega_2$  и  $\omega$ .

## Особые «фокусы»

### 4) Поворот на $60^\circ$ и равносторонний треугольник

- ▶ По одну сторону от отрезка  $AB$  построены равносторонние треугольники  $ACD$  и  $DEB$ , точка  $D$  лежит на  $AB$  (см. рисунок). Точки  $M$  и  $K$  — середины отрезков  $AE$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что треугольник  $DMK$  — равносторонний.
- ▶ В правильном шестиугольнике  $ABCDEF$  отмечены середины отрезков  $BD$  и  $EF$  — точки  $K$  и  $M$  соответственно. Докажите, что треугольник  $AMK$  является равносторонним.

## Особые «фокусы»

### 5) Поворот на $90^\circ$ и квадраты

- ▶ На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $K$  соответственно;  $\angle BAM = \angle MAK$ . Докажите, что  $BM + KD = AK$ .
- ▶ Точка  $A$  — общая вершина квадратов  $ABCD$  и  $AEFG$  (см. рисунок). Докажите, что медиана  $AM$  треугольника  $ABG$  и высота  $AH$  треугольника  $ADE$  лежат на одной прямой.



## Особые «фокусы»

6) Произвольный поворот: как выбрать центр и угол?

- ▶ В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$  стороны  $BC$ ,  $CD$  и  $AE$  равны 1, а  $AB + DE = 1$ . Кроме того,  $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ . Докажите, что площадь пятиугольника  $ABCDE$  равна 1.
- ▶ Из прямого угла  $C$  треугольника  $ABC$  проведена биссектриса  $CD$ .  $DE$  и  $DK$  — биссектрисы в треугольниках  $ADC$  и  $CDB$  соответственно. Докажите, что  $AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2$ .

## Особые «фокусы»

- 7) Угол между прямой и её образом равен углу поворота
- ▶ Точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  лежат на одной прямой, а треугольники  $XBA$ ,  $YBC$ ,  $ZDC$  — равносторонние (см. рисунок).  
Докажите, что
    - а) угол между прямыми  $AC$  и  $X'Y'$  равен  $60^\circ$ ;
    - б) точка пересечения  $AC$  и  $X'Y'$  лежит на описанной окружности треугольника  $YBC$ ;
    - в)  $AC$ ,  $BD$  и  $X'Y'$  пересекаются в одной точке.

# Задачи для привлечения внимания

- ▶ Задача про мост — параллельный перенос
- ▶ Задача про колбасу — центральная симметрия
- ▶ Задача про Сатурн — композиция

- ▶ Задача–«читалка» в самом начале
- ▶ Теория — не больше 15-20 минут
- ▶ Разбор задач — не только решение, но и как к нему прийти и почему хочется пойти именно таким путём
- ▶ Хотя бы одна картинка в листке должна быть
- ▶ Хотя бы половины картинок в листке должно не быть