ПЛОЩАДИ ПИФАГОРОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Г.Б. Шабат

25 января 2024 года

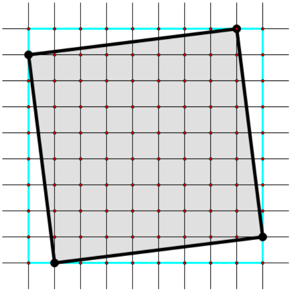
**МЦНМО, 143-е заседание
творческого семинара учителей математики
под руководством А.Д. Блинкова**

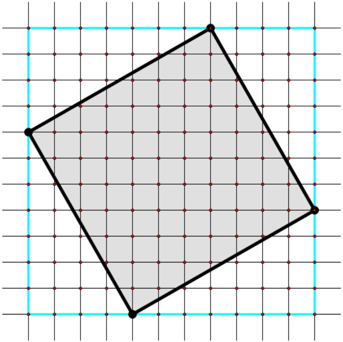
План доклада

0. Связь с предыдущим докладом 2
1. Пифагоровы треугольники 3
2. Краткая история 4
3. Гипотетический ответ 5
4*. Гипотеза Бёрча–Свиннертона-Дайера 6
Литература 7

0. Связь с предыдущим докладом

Площади косых квадратов и количество представлений натурального числа в виде суммы двух квадратов.
СМ. ДОСКУ

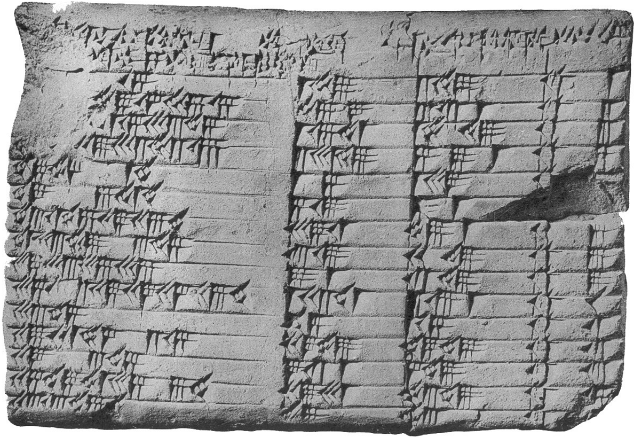




$$5\cdot 13 = 65=1^2+8^2=4^3+7^2$$

1. Пифагоровы треугольники

Плимптон 322:



Рекорд: $12709^2 + 13500^2 = 18541^2$

2. Краткая история

В основном по [**Conrad2006**].

Фибоначчи в книге *Liber Quadratorum (Книга квадратов)*, 1225

Рукопись сохранилась в миланской библиотеке. В ней, помимо прочего,

$(\Box+\Box)(\Box+\Box)\subseteq\Box+\Box$ – за столетия до Ферма, Эйлера, Гаусса, ...

дал **определение**:

$n\in\mathbb{Q}$ – *congruum*, если $\exists x\in\mathbb{Q}\ \left[x^2\pm n\in\Box\right]$.

От латинского *congruere (встретиться)*, то есть *три квадрата "встретились"*.

В [**Dickson1952**] анализируется арабский текст (Mohammed Ben Alhochain, 10-й век!), в котором нахождение площадей прямоугольных треугольников названо *основной проблемой*.

3. Гипотетический ответ

$$\text{Э}_{n;B,C} : X^2 + BY^2 + CZ^2 = n$$

Теорема [Tunnell1983]. *Из гипотезы Бёрча – Свиннертона-Дайера следует, что*

для $n \in 2\mathbb{N} + 1$

$$n \text{ конгруэнтно} \Longleftrightarrow \left[\#\text{Э}_{n;2,8}(\mathbb{Z}) = 2\#\text{Э}_{n;2,32}(\mathbb{Z})\right];$$

для $n \in 2\mathbb{N}$

$$n \text{ конгруэнтно} \Longleftrightarrow \left[\#\text{Э}_{\frac{n}{2};4,8}(\mathbb{Z}) = 2\#\text{Э}_{\frac{n}{2};4,32}(\mathbb{Z})\right].$$

4*. Гипотеза Бёрча–Свиннертона-Дайера

По [**Коблиц1988**].
Хассе-Вейля

Стр. 100:

$$\mathrm{L}(\mathbf{E}, s) := \prod_{\text{простые } p} \frac{\zeta(s)\zeta(s+1)}{\mathrm{Z}_{\mathbf{E}(\mathbb{F}_p)}(p^{-s})}, \text{ где}$$

(стр. 66: $\mathrm{Z}_{\mathbf{E}(\mathbb{F}_p)}(T) := \exp \sum_{r=1}^{\infty} \#\mathbf{E}(\mathbb{F}_{p^r}) \frac{T^r}{r}$.)

L сходится при $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$. Гипотеза Б-СД: Она аналитически продолжается левее и

$$\boxed{\mathrm{ord}_{s=1}\mathrm{L} = \mathrm{rank}\big(\mathbf{E}(\mathbb{Q})\big)}$$

Литература

- Keith Conrad, *The congruent number problem.* http://www.math.uconn.edu/ kconrad/blurbs/ugradnumthy/congnumber.pdf.
- L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers , Vol. II.*. New York: Chelsea 1952.
- J. Tunnell, *A Classical Diophantine Problem and Modular Forms of Weight* $\frac{3}{2}$. Invent. Math. 72 (1983), 323–334.
- Нил Коблиц, *Введение в эллиптические кривые и модулярные формы.* М., "Мир", 1988.