Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 9

Б. П. Гейдман

Площади многоугольников

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2001

УДК 514.11
Г27
ББК 22.151.0

Аннотация

Брошюра посвящена вычислению площадей прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции и других многоугольников. Рассмотрены решения 20 задач, сгруппированных вокруг следующих вопросов:

— равновеликость и равносоставленность многоугольников;

— медиана делит треугольник на два треугольника равной площади;

— разрезание треугольника и выпуклого четырёхугольника на две равновеликие части.

Приведены 16 задач (с ответами и указаниями) для самостоятельного решения.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции, прочитанной автором для школьников 8–11 классов 21 октября 2000 года на Малом мехмате.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников, учителей...

ISBN 5–900916–72–3

Гейдман Борис Петрович

Площади многоугольников

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»)
М.: МЦНМО, 2001. — 24 с.: ил.

Главный редактор серии *В. М. Тихомиров*.

Редакторы *А. А. Ермаченко*, *Е. Н. Осьмова*. Техн. редактор *М. Ю. Панов*.

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 10/I 2001 года.
Формат бумаги 60×88 $^1/_{16}$. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 1,50.
Усл. печ. л. 1,50. Уч.-изд. л. 1,38. Тираж 1500 экз. Заказ 4041.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ.
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554–21–86.

В брошюре рассматриваются задачи на площадь многоугольника. В первую группу вошли задачи, для решения которых не требуется применения аналитического аппарата, достаточно знания основных свойств площади: равные плоские фигуры имеют одну и ту же площадь; площадь фигуры равна сумме площадей частей, из которых она составлена.

Решения второй группы задач используют в качестве основного тот факт, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Решения третьей группы задач опираются на формулу для вычисления площади треугольника.

Понятие площади многоугольника

Каждому многоугольнику можно поставить в соответствие положительное число S (площадь) так, чтобы выполнялись следующие свойства:

I. Равные многоугольники имеют равные площади.

II. Если многоугольник составлен из двух многоугольников, не имеющих общих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

III. Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна 1 (единице измерения площадей).

Иными словами, площадь — это функция, заданная на множестве многоугольников, принимающая только положительные значения и удовлетворяющая условиям I, II, III.

Примем без доказательства, что площадь многоугольника существует*).

Площадь прямоугольника

Докажем (выведем из свойств I, II, III), что площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.

Пусть a и b — длины сторон прямоугольника.

---

*) Доказательство теоремы существования площади многоугольника довольно сложное. Оно содержится, например, в статье В. Г. Болтянского «О понятиях площади и объёма» (см. раздел «Литература», с. 24).

А. Если a и b — целые числа, разделим стороны прямоугольника соответственно на a и b равных частей и разобьём прямоугольник на ab квадратов со стороной 1 (рис. 1). Площадь каждого из квадратов равна 1 в силу аксиомы III, значит, площадь всего прямоугольника равна ab в силу аксиомы II.

Б. Пусть длины сторон прямоугольника выражены конечными десятичными дробями, скажем, $a = a_0{,}a_1a_2...a_n$, $b = b_0{,}b_1b_2...b_n$, где a_0 и b_0 — целые числа, a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n — цифры от 0 до 9. (Мы можем считать, что a и b имеют одинаковое число цифр после запятой, в противном случае припишем справа к одному из чисел необходимое количество нулей.)

Возьмём единичный квадрат и каждую его сторону разделим на 10^n равных частей. Весь квадрат разобьём на 10^{2n} маленьких квадратиков (рис. 2), которые в силу аксиомы I имеют одинаковую площадь $S_{\text{м. к.}}$. По аксиоме II площадь единичного квадрата равна $10^{2n}S_{\text{м. к.}}$. И так как по аксиоме III эта площадь равна 1,

$$S_{\text{м. к.}} = \frac{1}{10^{2n}} = 10^{-2n}.$$

Числа $a \cdot 10^n$ и $b \cdot 10^n$ — целые. Делим стороны прямоугольника на $a \cdot 10^n$ и $b \cdot 10^n$ равных частей соответственно. Прямоугольник разбиваем на $ab \cdot 10^{2n}$ равных маленьких квадратиков (рис. 3), и в силу аксиомы II площадь прямоугольника равна

$$ab \cdot 10^{2n} \cdot S_{\text{м. к.}} = ab \cdot 10^{2n} \cdot 10^{-2n} = ab.$$

В. Рассмотрим теперь общий случай, когда a и b — бесконечные десятичные дроби:

$$a = a_0{,}a_1a_2...a_n... \quad \text{и} \quad b = b_0{,}b_1b_2...b_n...$$

Возьмём рациональные приближения чисел a и b по недостатку, т. е. $a_0{,}a_1a_2...a_n$ и $b_0{,}b_1b_2...b_n$. Прямоугольник с такими сторонами является частью прямоугольника со сторонами a и b: это следует из свойств длины отрезков. Также рассмотрим прямоугольник со сторонами $a_0{,}a_1a_2...a_n + 10^{-n}$ и $b_0{,}b_1b_2...b_n + 10^{-n}$ (это приближения чисел a и b по избытку); он будет содержать исходный прямоугольник (рис. 4). Используя аксиому II, несложно получить, что площадь данного прямоугольника удовлетворяет условию

$$a_0{,}a_1...a_n \cdot b_0{,}b_1...b_n \leqslant S \leqslant (a_0{,}a_1...a_n + 10^{-n}) \cdot (b_0{,}b_1...b_n + 10^{-n}).$$

При неограниченном увеличении n левая и правая части этого неравенства стремятся к одному и тому же действительному числу ab. А это значит, что площадь данного прямоугольника также равна ab.

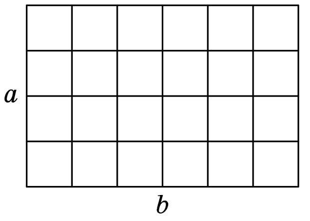

Рис. 1

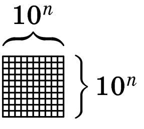

Рис. 2

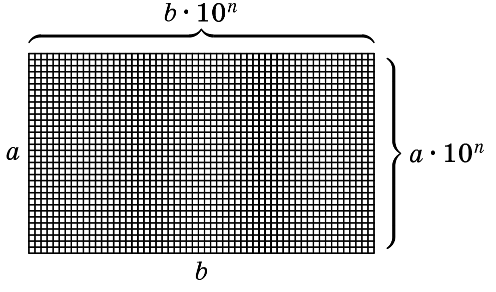

Рис. 3

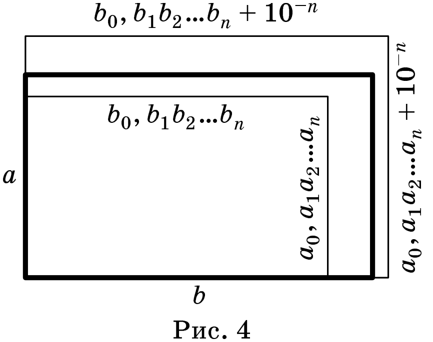

Рис. 4

Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции и любого многоугольника

А. Площадь прямоугольного треугольника. Достроим его до прямоугольника (рис. 5). Диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника, и из аксиом I и II следует, что площадь треугольника равна половине площади прямоугольника.

Б. Если же треугольник не прямоугольный, то его можно представить в виде объединения (рис. 6) или разности

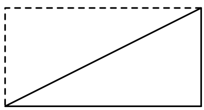

Рис. 5

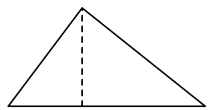

Рис. 6

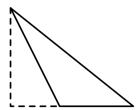

Рис. 7

(рис. 7) двух прямоугольных треугольников. Следовательно, площадь единственна*) на множестве всех треугольников.

В. Площадь параллелограмма, трапеции, произвольного многоугольни-

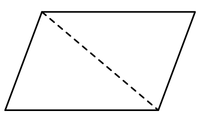

Рис. 8

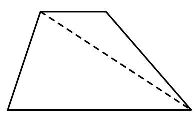

Рис. 9

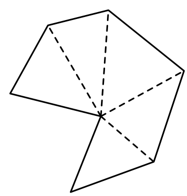

Рис. 10

ка тоже единственна: это следует из свойств площади и из единственности площади произвольного треугольника (рис. 8, 9, 10).

Задачи о равновеликих фигурах

Равновеликими называются фигуры, имеющие одинаковую площадь.

В решениях этих задач не используются формулы для вычисления площадей (треугольников, параллелограммов, трапеций) — мы опираемся только на основные свойства площади, т. е. на аксиомы I, II, III.

*) То есть существует не более одной функции S (площадь), удовлетворяющей аксиомам I, II, III.

Задача 1. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M. Площадь треугольника BMC равна S (рис. 11). Какова площадь параллелограмма?

Решение. Проведём через точку M прямую, параллельную стороне AB (рис. 12). Треугольники AMB и NBM равны; треугольники CMD и MCN также равны. Таким образом, площадь незаштрихованной части параллелограмма равна площади заштрихованной, поэтому площадь всего параллелограмма равна $2S$. □

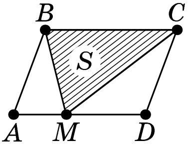

Рис. 11

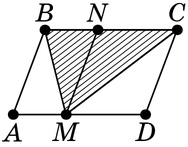

Рис. 12

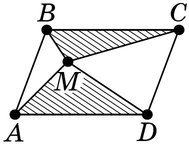

Рис. 13

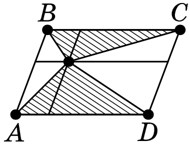

Рис. 14

Задача 2. Пусть теперь точка M взята внутри параллелограмма и соединена со всеми его вершинами (рис. 13). Площадь заштрихованной части параллелограмма равна S. Чему равна площадь параллелограмма?

Решение. Как и в предыдущей задаче, проведя через точку M прямые, параллельные сторонам (рис. 14), убеждаемся, что площадь незаштрихованной части параллелограмма равна площади заштрихованной, а площадь всего параллелограмма равна $2S$. □

Задача 3. Параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$, у которых стороны AD и $A'D'$ лежат на одной прямой, равновелики (рис. 15).

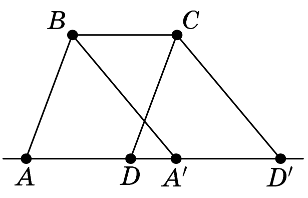

Рис. 15

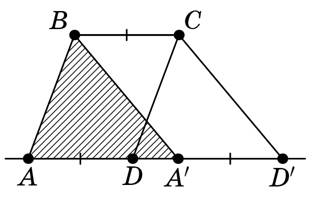

Рис. 16

Решение. Трапеция $ABCD'$ есть, с одной стороны, объединение треугольника ABA' и параллелограмма $A'BCD'$ (рис. 16), с другой стороны, объединение треугольника DCD' и параллелограмма $ABCD$; треугольники ABA' и DCD' равны. □

Задача 4. Дан параллелограмм $ABCD$. Рассмотрим новый параллелограмм, у которого одна вершина совпадает с вершиной B, соседняя с ней вершина M лежит на стороне AD, а сторона KL, противоположная стороне BM, лежит на прямой, проходящей через вершину C (рис. 17). Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $BKLM$ равновелики.

Решение. Можно считать (см. предыдущую задачу), что сторона KL содержит точку C (рис. 18). Треугольник BCM — «общий» для обоих параллелограммов, и $S_{ABCD} = 2S_{BMC} = S_{BKLM}$ по задаче 1. □

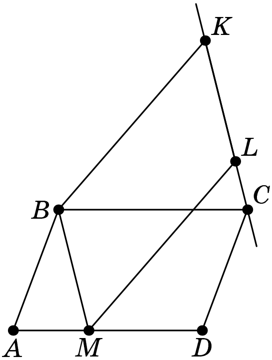

Рис. 17

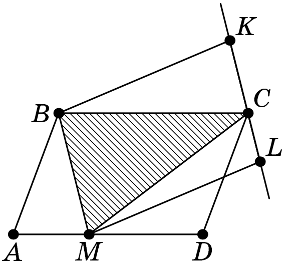

Рис. 18

Задача 5. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

Решение. Пусть BM — медиана треугольника ABC. Достроим треугольник до параллелограмма $ACFD$, проведя через точку B прямую, параллельную AC, а через точки A и C — прямые, параллельные BM (рис. 19). Параллелограммы $ADBM$ и $MBFC$ равны: параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AM}$ переводит первый из них во второй. Поэтому $S_{ADBM} = S_{MBFC}$. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, значит,

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ADBM} \quad \text{и} \quad S_{CBM} = \frac{1}{2}S_{MBFC}.$$

Следовательно, $S_{ABM} = S_{CBM}$. □

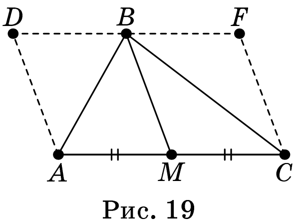

Рис. 19

Задача 6. Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей.

Р е ш е н и е. Пусть O — точка пересечения медиан AK, BL и CM треугольника ABC (рис. 20). OM — медиана треугольника AOB, значит, $S_{AOM} = S_{BOM}$; обозначим эту величину через x. Пусть также $y = S_{BOK} = S_{COK}$, $z = S_{COL} = S_{AOL}$. Поскольку BL — медиана треугольника ABC, $S_{ABL} = S_{CBL}$, т. е. $2x + z = 2y + z$, откуда $x = y$. Аналогично, $y = z$. □

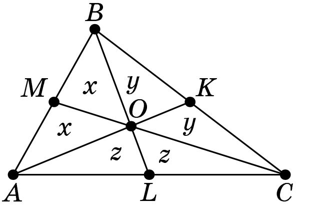

Рис. 20

Задача 7. Каждая сторона треугольника ABC продолжена на свою длину, так что точка B — середина отрезка AB', C — середина BC', точка A — середина CA' (рис. 21). Площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь треугольника $A'B'C'$.

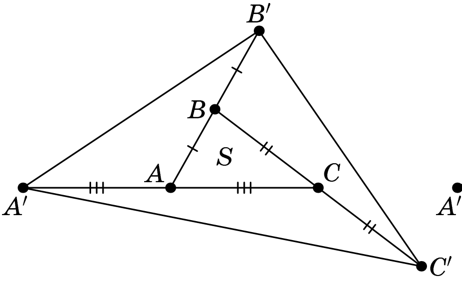

Рис. 21

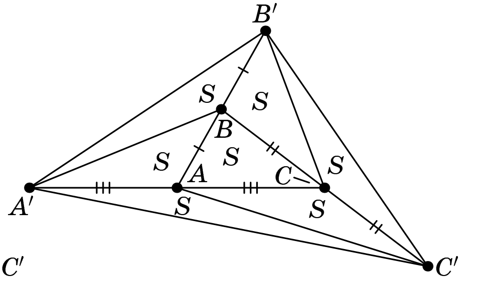

Рис. 22

Р е ш е н и е. Проведём отрезки $A'B$, $B'C$ и $C'A$ (рис. 22). CB — медиана треугольника ACB', поэтому $S_{B'CB} = S$ (см. задачу 5); $B'C$ — медиана треугольника $BB'C'$, поэтому $S_{C'B'C} = S$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$$S_{C'AC} = S_{A'C'A} = S_{A'BA} = S_{B'A'B} = S,$$

следовательно, $S_{A'B'C'} = 7S$. □

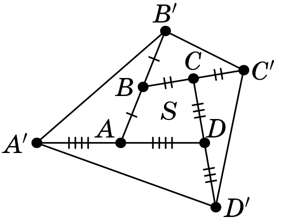

Рис. 23

Задача 8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ площади S. Продолжим его стороны, как в предыдущей задаче: пусть точка B — середина отрезка AB', C — середина BC', D — середина CD', A — середина DA' (рис. 23). Найти площадь четырёхугольника $A'B'C'D'$.

Р е ш е н и е. Проведём в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD и обозначим площадь треугольника ABD через p, а площадь треугольника BCD через q, так что $p + q = S$ (рис. 24). Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, получаем, что

$$S_{A'BA} = S_{B'A'B} = p$$
$$\text{и } S_{C'DC} = S_{D'C'D} = q.$$

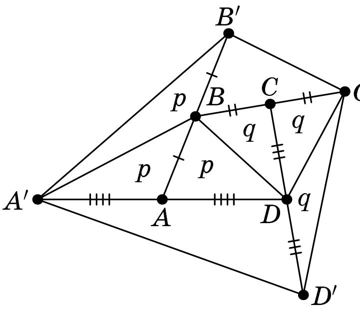

Рис. 24

Таким образом,

$$S_{A'B'A} + S_{C'D'C} = 2p + 2q = 2S.$$

Аналогично, проводя диагональ AC, можно доказать, что

$$S_{B'C'B} + S_{D'A'D} = 2S.$$

Итак, $S_{A'B'C'D'} = S + 2S + 2S = 5S$. □

Задачи о разрезаниях фигур

Рассмотрим серию задач о разрезании треугольника, выпуклого четырёхугольника некоторой прямой на две равновеликие части.

Нам понадобится вспомогательная задача.

Задача 9. Пусть диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Тогда треугольники AOB и DOC равновелики.

Р е ш е н и е. Проведём через точку B прямую, параллельную AC, а через точку C — прямую, параллельную BD (рис. 25); точки пересечения этих прямых с прямой AD обозначим соответственно B' и C'. Параллелограммы $ACBB'$ и $DBCC'$ равновелики (см. задачу 3), значит, равновелики их «половинки» — треугольники ABC и DCB. «Выбрасывая» из этих треугольников один и тот же треугольник BOC, убеждаемся, что треугольники AOB и DOC также равновелики; другими словами,

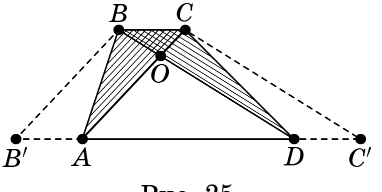

Рис. 25

$$S_{AOB} = S_{ABC} - S_{BOC} = \\ = S_{DCB} - S_{BOC} = S_{DOC}. \quad □$$

На этом свойстве трапеции и основаны решения последующих задач.

Задача 10. Через произвольную точку на стороне треугольника провести прямую, которая делит его на две равновеликие части.

Р е ш е н и е. Пусть P — точка на стороне AC треугольника ABC, M — середина AC. Если P совпадает с M, то BM — искомая прямая. Рассмотрим случай, когда P лежит между точками M и C (если P лежит на отрезке AM, рассуждения аналогичны). Тогда площадь треугольника APB больше половины площади треугольника ABC.

Если вращать прямую PN вокруг точки P (точка N скользит по отрезку AB), площадь треугольника APN будет убывать. В начале движения, когда точка N совпадала с B, эта площадь была больше $\frac{1}{2}S_{ABC}$, в конце, при $N = A$, эта площадь станет равной нулю (треугольник вырождается). По принципу непрерывности должен наступить момент, когда эта площадь равна $\frac{1}{2}S_{ABC}$.

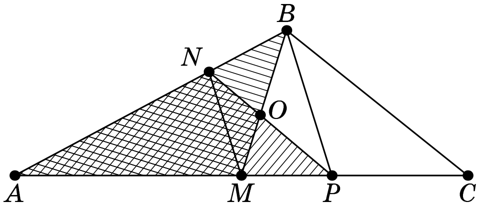

Рис. 26

Используя предыдущую задачу, можно показать, что это произойдёт, когда четырёхугольник $BPMN$ превратится в трапецию (рис. 26). Действительно, поскольку $S_{BON} = S_{POM}$ (O — точка пересечения диагоналей трапеции),

$$S_{APN} = S_{AMON} + S_{POM} = S_{AMON} + S_{BON} = S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Итак, вот способ построения прямой PN, делящей пополам площадь треугольника ABC: проведём через точку M прямую, параллельную BP, тогда N — точка пересечения этой прямой со стороной AB, если P лежит на отрезке MC (или со стороной BC, если P лежит на отрезке AM). □

Задача 11. Через вершину выпуклого четырёхугольника провести прямую, которая делит его на две равновеликие части.

Р е ш е н и е. Проведём эту прямую через вершину A четырёхугольника $ABCD$. Если диагональ AC делит площадь $ABCD$ пополам, задача решена. Пусть O — точка пересечения диагоналей $ABCD$, M — середина BD. Ломаная AMC делит четырёхугольник на равновеликие части. Допустим, что точка M лежит на отрезке OD (рис. 27).

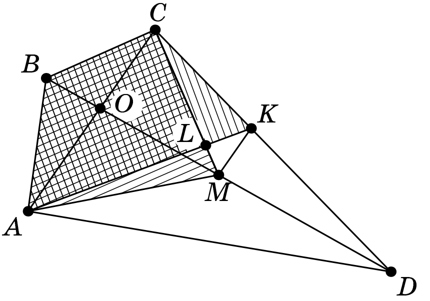

Рис. 27

Проведём через точку M прямую, параллельную AC, K — точка пересечения этой прямой со стороной CD. Тогда

$$S_{ABCK} = S_{ABCL} + S_{CLK} = S_{ABCL} + S_{ALM} = S_{ABCM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \qquad \square$$

С помощью этой задачи несложно решить следующую.

Задача 12. На стороне треугольника как на диаметре построен полукруг (рис. 28). Провести прямую, которая делит эту фигуру на две равновеликие части.

З а м е ч а н и е. Эта фигура не является многоугольником, но интуитивно понятно, что можно определить функцию площади других «хороших» фигур (в частности, круга и полукруга) так, чтобы выполнялись аксиомы I, II, III.

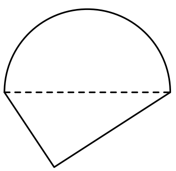

Рис. 28

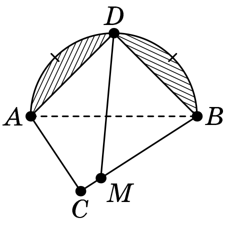

Рис. 29

Р е ш е н и е. Пусть полукруг построен на стороне AB треугольника ABC, D — точка, которая делит полуокружность пополам (эту точку легко построить: она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB). Заштрихованные сегменты (рис. 29) равны (так как симметричны) и, следовательно, имеют одинаковую площадь. Проведём через точку D прямую, которая делит пополам площадь четырёхугольника $ADBC$. Очевидно, это прямая и будет искомой. $\square$

Теперь — обобщение задачи 11.

Задача 13. Через точку на стороне выпуклого четырёхугольника провести прямую, которая делит его на две равновеликие части.

Р е ш е н и е. Пусть M — данная точка на стороне AD четырёхугольника $ABCD$. Проведём через точки B и C прямые, которые делят площадь четырёхугольника пополам.

Рассмотрим сначала случай, когда эти прямые пересекают сторону AD в точках B' и C' соответственно (рис. 30). Пусть точка M лежит на отрезке AC'. Если M совпадает с C', то CC' — искомая прямая. Если M не совпадает с точкой C', то можно провести прямую $C'K$, параллельную прямой CM (K — точка на стороне CD) и

$$S_{ABCKM} = S_{ABCOM} + S_{COK} = S_{ABCOM} + S_{MOC'} = S_{ABCC'} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

(O — точка пересечения диагоналей трапеции $KCMC'$).

Если M лежит на отрезке $B'D$, то проведём прямую $B'K$ параллельно BM и искомой прямой будет прямая MK (рис. 31).

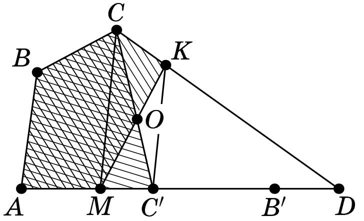

Рис. 30

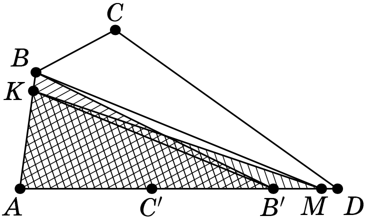

Рис. 31

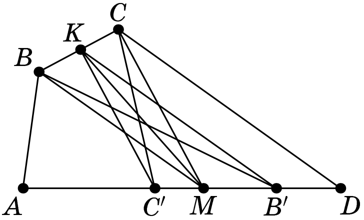

Рис. 32

В случае, когда точка M лежит на отрезке $C'B'$, можно проводить и прямую $C'K$ параллельно MC, и прямую $B'K$ параллельно MB (рис. 32); оба построения приводят к одной и той же точке K.

Описанный приём построения проходит и в случае, когда только одна из прямых, проходящих через точки B и C и делящих четырёхугольник $ABCD$ на две равновеликие части, пересекает сторону AD (рис. 33 и 34).

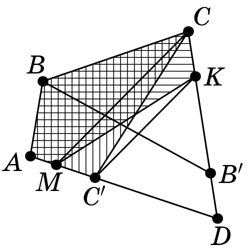

Рис. 33

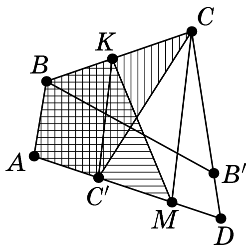

Рис. 34

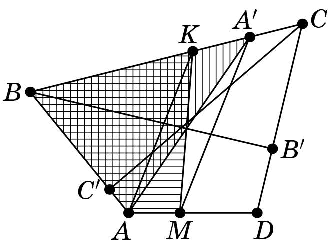

Рис. 35

И наконец, рассмотрим случай, когда ни одна из этих прямых не пересекает сторону AD четырёхугольника $ABCD$ (рис. 35). В этой ситуации проведём через вершину A прямую AA', которая делит четырёхугольник на две равновеликие части. Прямая AK, параллельная прямой $A'M$, пересекает сторону BC в точке K. MK — искомая прямая. □

Формула для площади треугольника

Площадь треугольника вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}ah_a,$$

где a — длина стороны треугольника, h_a — высота, опущенная на эту сторону (рис. 36).

Доказательство этой формулы мы фактически провели на стр. 6.

Следствие 1. Площади треугольников, имеющих одно и то же основание, пропорциональны высотам (рис. 37):

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{h_B}{h_D}.$$

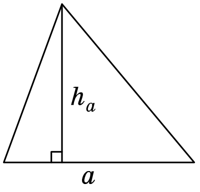

Рис. 36

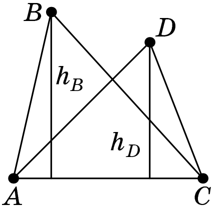

Рис. 37

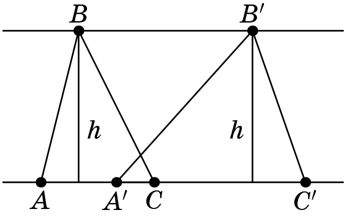

Рис. 38

Следствие 2. Площади треугольников, имеющих одну и ту же высоту, пропорциональны основаниям (рис. 38):

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AC}{A'C'}.$$

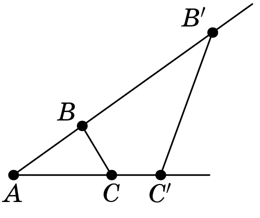

Рис. 39

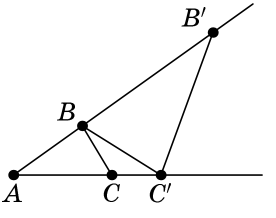

Рис. 40

Следствие 3. Площади треугольников, имеющих общий угол, пропорциональны произведениям сторон, заключающих этот угол (рис. 39):

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}.$$

Доказательство следствия 3. Проведём отрезок BC' (рис. 40). Тогда, согласно следствию 2,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}} = \frac{AC}{AC'}, \qquad \text{и} \qquad \frac{S_{ABC'}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB}{AB'}.$$

Перемножая эти равенства, получаем, что

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AC \cdot AB}{AC' \cdot AB'}. \qquad \square$$

Приведём теперь серию задач, решение которых опирается на формулу $S = \frac{1}{2}ah_a$ и её следствия.

Задача 14. Трапеция разделена диагоналями на четыре треугольника. Площади треугольников, прилегающих к основаниям, равны S_1 и S_2. Найти площадь трапеции.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$; $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$ (рис. 41). Мы знаем (см. задачу 9), что $S_{AOB} = S_{DOC}$, обозначим эту величину через x. Треугольники AOB и BOC имеют одну и ту же высоту; треугольники COD и AOD также имеют одну и ту же высоту. Поэтому

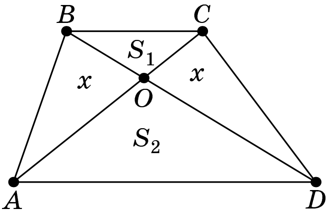

Рис. 41

$$\frac{x}{S_1} = \frac{AO}{OC}, \quad \frac{x}{S_2} = \frac{OC}{AO} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{S_1S_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{S_1S_2}.$$

(Величина $\sqrt{S_1S_2}$ называется средним геометрическим чисел S_1 и S_2.) Итак,

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2. \qquad \square$$

Задача 15. Точка M лежит на стороне BC, а точка N — на стороне AC треугольника ABC. Отрезки AM и BN пересекаются в точке O. Площади треугольников AON, AOB и BOM равны S_1, S_2 и S_3 соответственно. Найти площадь треугольника MCN.

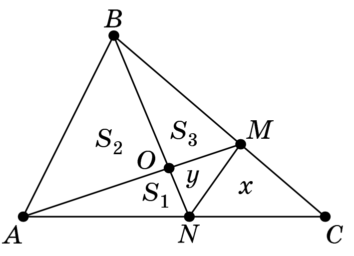

Рис. 42

Решение. Обозначим площадь треугольника MCN через x, а треугольника MON — через y (рис. 42). Тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ON}{BO} = \frac{y}{S_3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{S_1S_3}{S_2},$$

$$\frac{S_1 + S_2}{x + y + S_3} = \frac{S_{ABN}}{S_{NBC}} = \frac{AN}{NC} = \frac{S_{AMN}}{S_{NMC}} = \frac{y + S_1}{x}.$$

Подставляя $y = \dfrac{S_1 S_3}{S_2}$ в полученное уравнение

$$\frac{S_1 + S_2}{x + y + S_3} = \frac{y + S_1}{x},$$

находим

$$x = \frac{S_1 S_3 (S_1 + S_2)(S_2 + S_3)}{S_2^2 - S_1 S_3}. \qquad \square$$

Задача 16. Точки M, N, P лежат на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причём $AM : AB = BN : BC = CP : CA = 1 : 3$. Площадь треугольника MNP равна S. Найти площадь треугольника ABC.

Р е ш е н и е. Треугольники ABC и MBN имеют общий угол B, при этом $BM = \frac{2}{3}BA$ и $BN = \frac{1}{3}BC$ (рис. 43). Согласно следствию 3

$$S_{BMN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{2}{9} S_{ABC}.$$

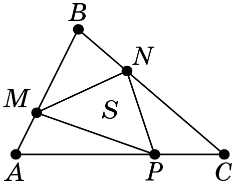

Рис. 43

По тем же соображениям

$$S_{MAP} = \frac{2}{9} S_{ABC} \quad \text{и} \quad S_{PCN} = \frac{2}{9} S_{ABC}.$$

Следовательно,

$$S = S_{ABC} - 3 \cdot \frac{2}{9} S_{ABC}, \quad \text{откуда} \quad S_{ABC} = 3S. \qquad \square$$

Задача 17. Точки M, N, P лежат на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причём $AM : AB = BN : BC = CP : CA = 1 : 2$. При пересечении отрезков AN, BP и CM образуется треугольник $A_1B_1C_1$, площадь которого равна S (рис. 44). Найти площадь треугольника ABC.

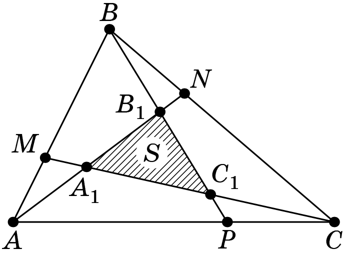

Рис. 44

Р е ш е н и е. Вычислим, какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AA_1M. Для этого найдём, в каком отношении отрезок AN делится отрезком CM. Проведём $NN_1 \parallel CM$ (рис. 45). Тогда

$$AM = \frac{1}{3}AB,$$

$$BN_1 = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}AB = \frac{2}{9}AB$$

$$\text{и}\quad \frac{AA_1}{AN} = \frac{AM}{AN_1} = \frac{AM}{AB - BN_1} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{7}{9}AB} = \frac{3}{7}.$$

Поэтому $S_{A_1AM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot S_{ABN} = \frac{1}{7}S_{ABN} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{21}S_{ABC}$. Точно так же можно получить, что $S_{B_1BN} = \frac{1}{21}S_{ABC}$ и $S_{C_1CP} = \frac{1}{21}S_{ABC}$. Итак,

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC} - S_{ABB_1} - S_{BCC_1} - S_{CAA_1} = \\ &= S_{ABC} - (S_{ABN} - S_{B_1BN}) - (S_{BCP} - S_{C_1CP}) - (S_{CAM} - S_{A_1AM}) = \\ &= S_{ABC} - 3\left(\frac{1}{3}S_{ABC} - \frac{1}{21}S_{ABC}\right) = \frac{1}{7}S_{ABC}, \end{aligned}$$

Откуда $S_{ABC} = 7S$. □

Последние три задачи — из замечательной книги Виктора Васильевича Прасолова «Задачи по планиметрии» (см. раздел «Литература», с. 24).

Задача 18. Пусть K и L — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Отрезки AK и BL пересекаются в точке P, отрезки CL и DK — в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников ABP и CDQ равна площади четырёхугольника $KPLQ$ (рис. 46).

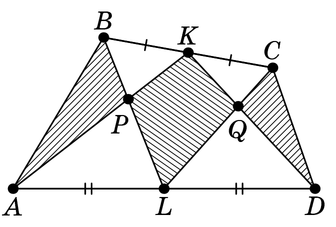

Рис. 46

Р е ш е н и е. Из точек B, K и C опустим на AD перпендикуляры BB_1, KK_1 и CC_1 (рис. 47). Тогда BCC_1B_1 — трапеция, а KK_1 — средняя линия этой трапеции. Следовательно, $KK_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1)$. Обозначим через a длину $AL = DL$. Имеем:

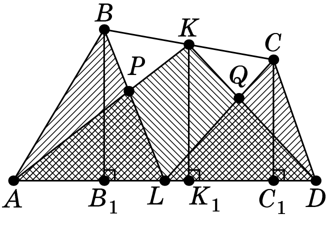

Рис. 47

$$S_{AKD} = a\cdot KK_1 = \frac{1}{2}a\cdot BB_1 + \frac{1}{2}a\cdot CC_1 = \\ = S_{ABL} + S_{DCL}.$$

С другой стороны,

$$S_{AKD} = S_{KPLQ} + S_{APL} + S_{DQL},$$

$$S_{ABL} = S_{ABP} + S_{APL}, \quad S_{DCL} = S_{CDQ} + S_{DQL},$$

значит, $S_{KPLQ} = S_{ABP} + S_{CDQ}$. □

Задача 19. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырёхугольника (рис. 48).

Р е ш е н и е. Пусть точки K и M делят на три равные части сторону AB, а точки N и L — сторону CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ ($AK = KM = MB$, $CN = NL = LD$). Каждую из «полосок» $MBCN$, $KMNL$, $AKLD$ разобьём диагональю на два треугольника. Рассмотрим заштрихованные треугольники BCN, MNL, KLD (рис. 49).

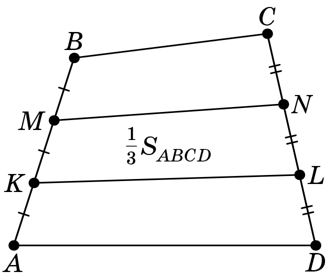

Рис. 48

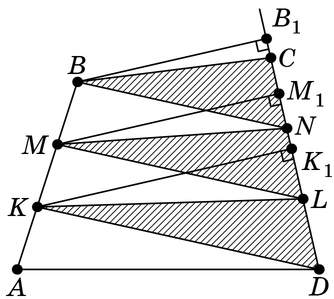

Рис. 49

Проведём их высоты BB_1, MM_1, KK_1. И снова BKK_1B_1 — трапеция, $MM_1 = \frac{1}{2}(BB_1 + KK_1)$. Основания треугольников равны, поэтому $S_{MNL} = \frac{1}{2}(S_{BCN} + S_{KLD})$. Аналогично, $S_{KLM} = \frac{1}{2}(S_{MNB} + S_{ADK})$. Следовательно,

$$S_{KMNL} = \frac{1}{2}(S_{MBCN} + S_{AKLD}),$$

$$3S_{KMNL} = (S_{MBCN} + S_{AKLD}) + S_{KMNL},$$

$$S_{KMNL} = \frac{1}{3}S_{ABCD}. \qquad \square$$

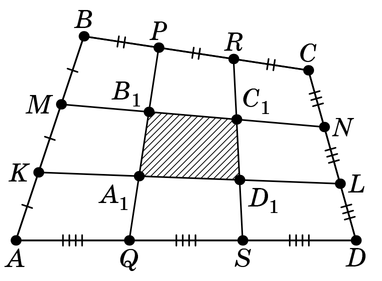

Рис. 50

Задача 20. Каждая из сторон выпуклого четырёхугольника разделена на три равные части, и соответствующие точки противоположных сторон соединены. Докажите, что площадь центрального (заштрихованного) четырёхугольника в девять раз меньше площади целого (рис. 50).

Р е ш е н и е. Введём обозначения, как на рис. 50. По предыдущей задаче площадь «средней полоски» $KMNL$ составляет треть всей площади четырёхугольника $ABCD$. Если мы докажем, что $MB_1 = B_1C_1 = C_1N$ и $KA_1 = A_1D_1 = D_1L$, задача решена.

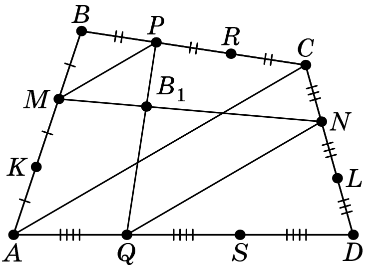

Рис. 51

Докажем, например, что $MB_1 = B_1C_1 = C_1N$. Гомотетия с центром в точке B и коэффициентом 3 переводит отрезок MP в отрезок AC, поэтому $MP \parallel AC$ и $MP = \frac{1}{3}AC$ (рис. 51). Гомотетия с центром в точке D и коэффициентом $\frac{3}{2}$ переводит отрезок NQ в отрезок CA, поэтому $NQ \parallel AC$ и $NQ = \frac{2}{3}AC$. Значит, $MP \parallel NQ$ и $MP = \frac{1}{2}NQ$, и гомотетия с центром в точке B_1 и коэффициентом -2 переводит MP в NQ. Следовательно, $MB_1 = \frac{1}{2}B_1N$, $MB_1 = \frac{1}{3}MN$. Аналогично, $C_1N = \frac{1}{3}MN$, а тогда и $B_1C_1 = \frac{1}{3}MN$. □

Задачи для самостоятельного решения

21. Пусть K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA (соответственно) выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (рис. 52). Отрезки KM и LN пересекаются в точке O. Докажите, что сумма площадей четырёхугольников $AKON$ и $CLOM$ равна сумме площадей четырёхугольников $BKOL$ и $DMON$.

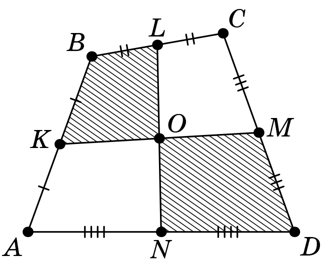

Рис. 52

22. Докажите, что выпуклые четырёхугольники, середины сторон которых совпадают, равновелики.

23. Длина стороны AC треугольника ABC равна a. Прямая l, параллельная стороне AC делит треугольник на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка прямой l, заключённого внутри треугольника ABC.

О т в е т: $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

24. Длины оснований трапеции равны a и b. Прямая l, параллельная основаниям трапеции, делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка прямой l, заключённого внутри трапеции.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

25. Диагонали LN и MK прямоугольника $KLMN$ пересекаются в точке O. Треугольники MON и MO_1N симметричны относительно общей стороны MN. Угол MON в два раза больше, чем угол LO_1K. Найдите стороны прямоугольника $KLMN$, если известно, что площадь пятиугольника LMO_1NK равна $5\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$ и 2.

26. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2 и S_3 (рис. 53). Найдите площадь данного треугольника.

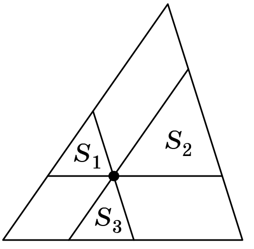

Рис. 53

Ответ: $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

27. Из точки, расположенной внутри остроугольного треугольника, опущены перпендикуляры на стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров равны a и k, b и m, c и n (рис. 54). Найдите отношение площади исходного треугольника к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

Ответ: $\dfrac{abc}{mkc+nkb+mna}$.

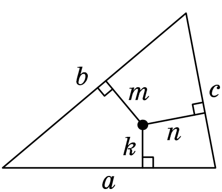

Рис. 54

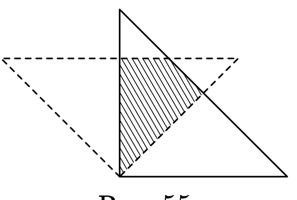
Рис. 55

28. На плоскости расположен равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого имеют длину a. Поворотом данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 55). Найдите площадь четырёхугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2$.

29. Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основанию трапеции; длина этой хорды равна b. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $\frac{8R^3}{b}$.

30. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны соответственно точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 : AB = 1 : 3$, $AC_1 : AC = 1 : 2$. Через точки A, B_1 и C_1 проведена окружность. Через точку B_1 проведена прямая, пересекающая отрезок AC_1 в точке D, а окружность — в точке E. Найдите площадь треугольника B_1C_1E, если $AC_1 = 4$, $AD = 1$, $DE = 2$, а площадь треугольника ABC равна 12.

Ответ: 3,5.

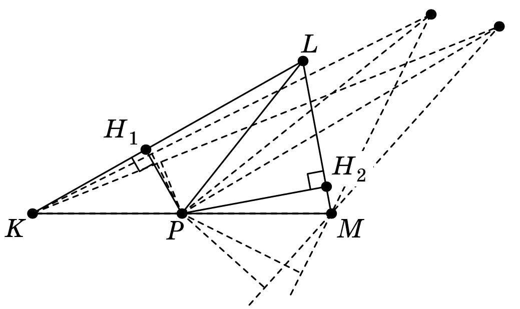

Рис. 56

31. В треугольнике KLM с основанием $KM = 6$ проведена медиана LP. Известно, что расстояния от точки P до боковых сторон KL и LM относятся как $1 : 2$ (рис. 56). Найдите длину медианы LP, при которой площадь треугольника KLM будет наибольшей.

Ответ: $\sqrt{41}$.

Указание. Поскольку $S_{KLP} = S_{LPM}$, то $KL : LM = PH_2 : PH_1 = 2 : 1$. Все такие точки L лежат на окружности (найдите её центр и радиус).

32. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, $OC = 2$ и $OD = 4$.

Ответ: 14,4.

Указание. См. рис. 57.

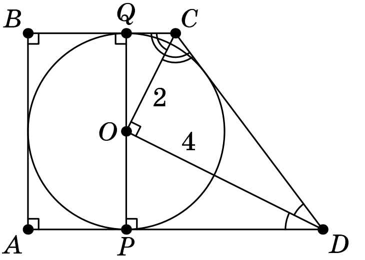

Рис. 57

33. Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в 3 и 4 раза меньше площади треугольника ABC. Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c. Найдите длину отрезка BD.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{3a^2+8c^2}{35}}$.

34. Около трапеции $KLMN$ описана окружность, причём основание KN является её диаметром. Известно, что $KN = 4$, $LM = 2$. Хорда MT пересекает диаметр KN в такой точке S, что $KS : SN = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника STN.

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{3}}{14}$.

35. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2CD = 3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если $AD = 2BC$.

Ответ: $\dfrac{10}{3}$.

36. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CM и AN, точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S. Найдите длину стороны AC.

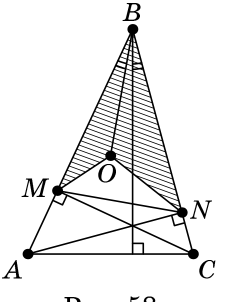

Рис. 58

Ответ: $2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\beta}$.

Указание. Площадь четырёхугольника $NOMB$ равна полупроизведению длин его диагоналей OB и MN, так как $OB \perp MN$ (рис. 58).

Литература

1. Болтянский В. Г. О понятиях площади и объёма. // Квант. 1977. № 5. С. 2–9.
2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии, ч. I. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986 (и др.).
3. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии (планиметрия). — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982, 1986. — (Библиотечка «Квант». Вып. 17).
4. См. также задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике в МГУ в 1980–1996 гг., в журнале «Квант» и его приложениях и, например, в следующих книгах:

   Справочник для поступающих в Московский университет. 1980–1996. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980–1996.

   Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2000 (и др.).