

# Градуированные кольца и их приложения

Дмитрий Пионтковский

## Программа курса

Курс не требует предварительных сведений за пределами начальных курсов алгебры. Более тесное знакомство с гомологической алгеброй, теорией колец или алгебраической геометрией не обязательно, но облегчит понимание примеров и приложений.

1. Алгебры над полем. Фильтрации и градуировки.  $\mathbb{Z}$ -градуированные алгебры и модули, ряды Гильберта. Комбинаторика слов и мономиальные алгебры.
2. Рост в алгебрах и модулях. Типы роста, размерность Гельфанда–Кириллова. Теорема Голода–Шафаревича и проблемы бернсайдовского типа.
3. Формальные языки и мономиальные алгебры. Регулярные языки, автоматные алгебры. Рациональность рядов Гильберта и теорема Хомского–Шютценберже.
4. Базисы Гребнера (и Ширшова), компьютерные вычисления в коммутативных и некоммутативных алгебрах. Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта.
5. Начала классической гомологической алгебры. Градуированные Tor и Ext. Дифференциально градуированные резольвенты, бар-конструкция.
6. Регулярные последовательности и полные пересечения. Алгебры глобальной размерности два как некоммутативные полные пересечения.
7. Гомологии и резольвенты мономиальных алгебр. Резольвента Аника. Вычисления гомологий с помощью базисов Гребнера.
8. Козюлевы (=кошулевы) алгебры, основы теории козюлевой двойственности. Обобщения козюлевых алгебр.
9. Абелевы категории модулей над градуированными алгебрами. Нетеровы и когерентные алгебры.
10. Основы некоммутативной проективной геометрии. Некоммутативные схемы. Регулярные алгебры Артина–Шелтера, градуированные алгебры Калаби–Яу.
11. Множества рядов Гильберта, условия конечности. Классификации рядов Гильберта для алгебр с небольшим числом порождающих. Алгебры линейного роста.
12. Общая алгебр и теория операд. Алгебраические операды как обобщения градуированных алгебр. Гомологические конструкции, козюлевы операды. Базисы Гребнера в операдах. Резольвенты и дифференциально градуированные модели операд.