Спектр оператора Лапласа на фундаментальной области модулярной группы и распределение простых чисел

Попов Д.А.

Оператор Лапласа на фундаментальной области модулярной группы имеет бесконечный дискретный спектр $\{\lambda_n\}$ $(0 \leqslant \lambda_n < \infty)$ и непрерывный спектр, покрывающий интервал $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$. П. Сарнак предположил, что спектр $\{\lambda_n\}$ должен играть фундаментальную роль в теории чисел. Результат, о котором будет рассказано, подтверждает это предположение. Оказывается, что существует явная формула, позволяющая по спектру $\{\lambda_n\}$ восстановить распределение простых чисел. Эта формула имеет вид

$$\Lambda(m) = F(m|\{r_n\}), \quad \lambda_n = r_n^2 + \tfrac{1}{4},$$

где $\Lambda(m)$ – функция Мангольдта:

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \ln p, & n = p^k \quad (p \ - \ \text{простое}), \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

В докладе будут пояснены основные этапы доказательства этой формулы. Доказательство основано на результатах Д. Хейчала, А.Б. Венкова и автора. Исходным пунктом служит формула следа Сельберга.

Литература

1. P. Sarnak, Israel Math. Conf. Proc. 8, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995.
2. D.A. Hejhal, Duke Math. J., **43**:3 (1976), p.441-481.
3. А.Б. Венков, Изв. АН СССР. Сер. матем., 42:3 (1978), с.484-499.
4. Д.А. Попов, Изв. РАН. Сер. матем. (2019) (в печати).