

Программа курса «Классические интегрируемые модели»

В.Э. Адлер

1 Уравнение Кортевега–де Фриза

Солитон Рассела. Вывод уравнения КдФ. Быстроубывающие решения в виде бегущей волны. Цепочка Ферми–Паста–Улама. Непрерывные пределы к уравнениям Буссинеска и КдФ. Законы сохранения. Преобразование Миуры. Модифицированное уравнение КдФ. Формальное решение уравнения Риккати (обращение преобразования Миуры). Производящая функция для законов сохранения.

1.1 Семинар. Дифференциальная алгебра

Формализация вычислений. Оператор полной производной, эволюционное дифференцирование, вариационная производная (оператор Эйлера). Алгоритм интегрирования по частям. Вычисление плотностей для уравнения КдФ. Рекуррентные формулы. Реализация в системе компьютерной алгебры.

2 Вспомогательная линейная задача для уравнения КдФ

Линеаризация преобразования Миуры. Представление нулевой кривизны. Представление Лакса. Общее определение и дальнейшие примеры: вторая вещественная форма уравнения мКдФ, уравнения \sin - и \sinh -Гордон, нелинейное уравнение Шрёдингера, цепочка Тоды.

2.1 Семинар. Законы сохранения для однородных полиномиальных уравнений

Вычисления для заданного уравнения. Генерация однородных многочленов. Приведение эквивалентных членов. Метод неопределённых коэффициентов. Примеры: уравнения Бюргерса, КдФ, мКдФ, rot -мКдФ.

3 Метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ

Оператор Шрёдингера с быстроубывающими потенциалами. Решения Ёоста. Матрица рассеяния. Спектральные данные. Эволюция по времени. Задача восстановления потенциала. Интегральное уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко. Построение N -солитонного решения.

3.1 Семинар. Взаимодействие солитонов уравнения КдФ

Изменение амплитуды и сдвиг фазы при столкновении солитонов. Отсутствие тройного взаимодействия. Асимптотика N -солитонного решения. Примеры решений с полюсными особенностями. Тригонометрические и рациональные решения.

4 Высшие симметрии уравнения КдФ

Иерархия уравнения КдФ. Коммутативность потоков. Вычисление симметрий при помощи оператора рекурсии и при помощи формального решения уравнения Риккати.

Другие примеры: уравнение мКдФ и \sin -Гордон.

4.1 Семинар. Поиск интегрируемых полиномиальных уравнений

Применение метода неопределённых коэффициентов. Вычисления для различных показателей однородности. Новые примеры уравнений 5-го порядка. Уравнение Дима.

5 Гамильтонова структура уравнения КдФ

Функционалы. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Вариационные симметрии. Теорема Нётер. Вариационная формулировка для иерархии КдФ.

Скобки Пуассона для функционалов. Гамильтоновы дифференциальные операторы. Две гамильтоновы структуры для уравнения КдФ и их согласованность. Схема Ленарда–Магри.

5.1 Семинар. Конечнзонные решения уравнения КдФ

Кноидальная волна. Уравнения Новикова. Уравнения Дубровина. Преобразование Абеля.

6 Линеаризуемые и явно решаемые уравнения

Уравнения Хопфа, Бюргерса, Ибрагимова–Шабата, Лиувилля. Каскадный метод Лапласа для линейных гиперболических уравнений. Инварианты Лапласа и двумерная цепочка Тоды.

6.1 Семинар. Уравнение Бюргерса и комбинаторика

Производящая функция для иерархии Бюргерса. Рекуррентные соотношения и явные формулы для многочленов Белла. Разбиения множеств. Алгоритм перечисления разбиений. Комбинаторная интерпретация многочленов Белла и рекуррентных соотношений. Числа Стирлинга второго рода, числа Белла. Уравнение КдФ и числа Каталана.

7 Замены переменных

Точечные преобразования, контактные преобразования, дифференциальные подстановки. Правила преобразований операторов дифференцирования. Продолжение преобразований на старшие производные. Проблема эквивалентности.

Однопараметрические группы преобразований. Группы и алгебры Ли преобразований. Дифференциальные инварианты.

7.1 Семинар. Примеры

Переход к полярным координатам, преобразование годографа, преобразование Лежандра, введение потенциала, преобразование Миуры. Эквивалентность уравнений Дима и КдФ.

Группы вращений, растяжений, сдвигов, дробно-линейных преобразований. Производная Шварца.

8 Групповой анализ дифференциальных уравнений

Уравнения, инвариантные относительно группы преобразований. Классические симметрии. Групповой анализ уравнения КдФ. Автомодельные решения. Трансценденты Пенлеве I, II.

Нелокальные высшие симметрии уравнения КдФ. Мастер-симметрии. Представление нулевой кривизны с переменным спектральным параметром.

8.1 Семинар. Вычисление алгебры классических симметрий для заданного уравнения

Групповой анализ уравнений теплопроводности, Лапласа, теплопроводности, мКдФ, sine–Гордон. Автомодельные решения.

Бесконечномерность алгебры классических симметрий и линеаризуемость. Уравнения Бюргерса и Лиувилля. Линеаризующие подстановки.

9 Преобразование Дарбу для оператора Шрёдингера

Преобразование Дарбу как композиция преобразований Миуры. Одевающая цепочка. Коммутативность преобразований Дарбу, формула нелинейной суперпозиции. Добавление собственных значений. Безотражательные потенциалы Баргманна.

Преобразование Бэклунда для уравнения КдФ. Коммутативность с потоками КдФ. Второй способ построения N -солитонного решения уравнения КдФ.

9.1 Семинар. Дифференциальные подстановки

Башня дифференциальных подстановок для уравнений типа КдФ.

Контр-пример: уравнение Кричевера–Новикова.

10 Точнорешаемые потенциалы из квантовой механики

Операторы рождения и уничтожения. Метод факторизации Инфельда и Халла. Потенциалы гармонического осциллятора, Кеплера, Розена, Морзе и др.. Удаление собственных значений.

10.1 Семинар. Замыкания одевающей цепочки

Периодическое замыкание. Конечнозонные операторы по Веселову–Шабату. Эквивалентность уравнениям Новикова и Дубровина.

Квази-периодическое замыкание. Трансценденты Пенлеве IV, V.

Замыкание по группе растяжений. Потенциал Шабата.

11 Уравнения Лакса на алгебрах Ли

Общая схема. Разбиения на подалгебры. Скобка Ли–Пуассона. ad-инвариантные функции. Интегрируемые иерархии. Коммутативность потоков.

Основной пример: алгебра петель \tilde{sl}_2 . Нелинейное уравнение Шрёдингера, магнетика Гайзенберга и КдФ. Преобразования Бэклунда.

11.1 Семинар. Частные решения НУШ

Две вещественные формы НУШ. Солитон огибающей. Солитон на пьедестале. Анализ двухсолитонных решений. Бризер. Солитоны с одинаковыми скоростями. Гладкие рациональные решения.

12 Уравнения Лакса на алгебре Ли псевдодифференциальных операторов

Умножение и обращение формальных рядов по степеням дифференцирования D . Тело ПДО. Теорема о вычете. Операция извлечения корня. Приложения в задаче о коммутирующих ДО. Иерархия уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Редукции к двумерным уравнениям, в частности, к уравнениям КдФ и Буссинеска.

12.1 Семинар. Псевдоразностные операторы

Дискретный вариант, формальные ряды по степеням оператора сдвига T . Невозможность извлечения корня. Дискретизация уравнения КП. Редукции. Цепочки Вольтерра и Богоявленского.

13 Обзор интегрируемых систем

Наиболее изученные классы интегрируемых уравнений. Что осталось за рамками курса. Бездисперсионные уравнения. Дискретные уравнения. Задачи многих тел. Неабелевы уравнения. Взаимосвязи между различными типами уравнений. Приложения.

13.1 Семинар. Задача классификации интегрируемых уравнений

Тесты на интегрируемость. Тест Пенлеве. Симметричный подход. Условия существования формальной симметрии.

Список литературы

- [1] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [2] А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
- [3] V.E. Zakharov (ed). What is Integrability? Springer-Verlag, 1991.
- [4] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.
- [5] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [6] А.Г. Рейман, М.А. Семёнов-Тян-Шанский. Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. Москва–Ижевск: ИКИ, 2003.
- [7] C. Rogers, W.K. Schief. Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.