ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

Курс в исполнении А.Б. Скопенкова

Будут изучаться важные наглядные объекты математики: векторные поля на двумерных и трехмерных поверхностях. Векторные поля являются одним из важнейших объектов топологии, теории динамических систем и их приложений.

Основное содержание курса — демонстрация алгебраических идей *теории гомологий* на примере решения классических проблем о существовании и классификации векторных полей. Эта теория имеет приложения во многих областях естествознания, позволяя строить необходимые алгоритмы. Венец курса — простое доказательство знаменитой теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия.

Основные идеи будут представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для изучения курса достаточно знания основ математического анализа нескольких переменных, а также гомотопической классификации отображений окружности в окружность [1, §3]. Однако для работы с новыми понятиями потребуется математическая культура. Каждое следующее занятие будет рассчитано на тех, кто решил большинство простых задач на понимание предыдущих.

Курс разбит на два модуля, за каждый из которых можно получить половину кредита, а второй из которых рассчитан на тех, кто сдал первый. Экзамен за каждый модуль состоит из решения задач в течение семестра и письменной работы.

Подробная информация (в частности, задачи к 1-му занятию): страница А. Скопенкова, перейти на `http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#vefi`.

Примерная программа. Ссылки — на параграфы из

[1] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2015, `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`.

1. Векторные поля на двумерных поверхностях. Теорема о еже. Критерий Эйлера-Пуанкаре существования ненулевого касательного векторного поля на поверхности. Гомотопическая классификация ненулевых касательных векторных полей на торе.* [1, §4]

2.* Нормальные векторные поля на двумерных поверхностях. Существование ненулевого нормального векторного поля на ориентируемой двумерной поверхности в четырехмерном пространстве. [1, §4]

3. Гомологии двумерных многообразий. Форма пересечений. Ее невырожденность (двойственность Пуанкаре). [1, §6]

4. Векторные поля на подмножествах трехмерного пространства. Теорема Брауэра о неподвижной точке для трехмерного шара. [1, §8]

5. Теорема Хопфа о существовании ненулевого касательного векторного поля на любом трехмерном многообразии. Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля для многомерных многообразий.* [1, §8]

6.* Нормальные векторные поля для трехмерных многообразий. [1, §8]

7.* Гомотопическая классификация векторных полей на трехмерных многообразиях (без полного доказательства). Приложения к ядерной физике. [1, §8]

8. Ориентируемость трехмерных многообразий. [1, §9]

9. Существование ортонормированных систем векторных полей. Характеристические классы для трехмерных многообразий. [1, §9]

10. Гомологии трехмерных многообразий. Форма пересечений. Ее невырожденность (двойственность Пуанкаре). [1, §10, §14]

11. Простое доказательство теоремы Штифеля о параллелизуемости любого ориентируемого трехмерного многообразия. [1, §9]

12.* Степени двойки, двоичное разложения числа n, алгебры с делением на $\mathbb{R}^n$ и невложимость n-мерных многообразий (без полных доказательств). [1, §11, §12]