

Программа курса «Комплексный анализ»

1. Комплексные числа, их свойства и действия над ними. Комплексная плоскость \mathbb{C} и ее компактификация $\bar{\mathbb{C}}$. Функция e^z и экспоненциальная форма комплексных чисел. Пути и кривые в \mathbb{C} . Приращение аргумента вдоль пути. Индекс пути и его свойства.

2. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Свойства комплексной производной. Голomorphic функции. Конформность, ее связь с голоморфностью. Основные элементарные функции комплексного переменного и их свойства. Многозначные функции, их непрерывные и голоморфные ветви.

3. Интеграл вдоль пути и вдоль кривой по комплексному переменному, их свойства. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши. Комплексная первообразная, ее свойства, формула Ньютона–Лейбница, существование голоморфных ветвей корня и логарифма в односвязных областях в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Интегральная формула Коши, формула Коши для производных и бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула Помпейю. Теорема о среднем, принцип максимума модуля. Теорема Мореры. Локально равномерная сходимости последовательностей голоморфных функций. Теорема Вейерштрасса.

4. Степенные ряды, формула Коши–Адамара. Почленная дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов. Особые точки на границе круга сходимости степенного ряда, теорема Принсгейма.

Ряды Тейлора. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля. Нули голоморфных функций. Теорема единственности. Аппроксимация голоморфных функций многочленами, теорема Рунге.

5. Ряды Лорана. Разложение голоморфных функций в ряд Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана. Изолированные особые точки голоморфных функций и их классификация, теорема Сохоцкого. Бесконечность как изолированная особая точка, целые и мероморфные функции с полюсом на бесконечности. Лемма Шварца и конформные автоморфизмы основных областей.

Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычет в точке ∞ . Вычисление вычетов. Лемма Жордана. Вычисление интегралов (в том числе интегралов в смысле главного значения) при помощи вычетов. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше. Принцип сохранения области.

6. Однолистные функции и их основные свойства (критерии однолистности обратимости, теорема Гурвица и ее следствия, теорема площадей и теорема Кебе).

7. Отыскание конформных отображений данных областей. Обратный принцип соответствия границ при конформном отображении. Принцип симметрии Римана–Шварца. Теорема Монтеля. Теорема Римана о конформном отображении. Граничное поведение конформных отображений. Теоремы Каратеодори.

8. Аналитические элементы и их аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение вдоль пути и по цепочке. Теорема о продолжении по гомотопным путям, теорема о монодромии.

Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса, ее голоморфные ветви. Точки ветвления аналитических функций и их классификация. Полные аналитические функции корень и логарифм. Понятие о римановой поверхности.

Дополнение¹. Модулярная функция, теоремы Пикара. Гармонические функции и их свойства. Целые функции: рост целой функции, порядок и тип; разложение в бесконечное произведение.

¹Если позволит время, или в форме задач на семинарах