Уравнения с частными производными (вводный курс)

Филимонов А.М. (amfilimonov@yandex.ru)

Комментарий. *Курс носит вводный характер. Поэтому в начале дается некоторый обзор постановок задач, идей, некоторых методов и перспектив их развития, чтобы у слушателей, по возможности, сформировалось некоторое интуитивное представление о предмете.*[1])

Курс рассчитан на студентов 3-4 курсов. Продолжительность - два семестра, причем каждый семестр можно сдавать независимо. Практика чтения курса в прошлые годы показала, что состав слушателей (и их ожиданий от этого курса) весьма неоднороден. Необходимые сведения по функциональному анализу сообщаются по ходу изложения и подкрепляются соответствующими примерами.

2 семестр (УЧП 2)

Гиперболические уравнения и системы, обобщение метода «бегущих волн».
Характеристические многообразия, бихарактеристики, волновой фронт в общем случае. Примеры гиперболических уравнений высших порядков и систем: уравнение Ишлинского, система Максвелла. Системы, *t*-гиперболические по Фридрихсу. Гиперболические квазилинейные уравнения и системы. Канонические формы Римана и Шаудера. Разрешимость задачи Коши и смешанной задачи в квазилинейном случае. Градиентная катастрофа и условия ее отсутствия (достаточные условия глобальной непрерывной разрешимости).

Метод «стоячих волн».
Спор о струне между Эйлером, Даламбером, Бернулли и Лагранжем. Метод Фурье. Спектральные задачи. Теорема Гильберта – Шмидта. Нелинейные задачи, гипотеза Дебая и проблема Ферми-Паста-Улама. «Стоячие волны» в нелинейных задачах. Связь с колмогоровскими поперечниками соболевских классов функций.

Вариационный метод.
Элементы теории обобщенных функций – пространства основных и обобщенных функций. Секвенциальный подход. Преобразование Фурье. Линейные операторы с частными производными. Фундаментальные решения. Задача о минимуме квадратичного функционала. Энергетическое пространство. Обобщенное решение и его интерпретация. Простейшие варианты теорем вложения Соболева. Следы. Экстремальные свойства собственных значений. Примеры: уравнение Лапласа и уравнение Софи Жермен. Вариационный подход в нелинейных задачах. Вариационный метод для эволюционных уравнений.

Параболические задачи.
Уравнения, параболические по Петровскому. Параболические системы. Фундаментальные решения. Проблема единственности, лестница Тэклинда, квазианалитические классы функций.

[1]) *В теории линейных уравнений в частных производных наиболее плодотворные методы были выработаны не в процессе рассмотрения отвлеченно поставленной задачи, а скорее при изучении специальных физических проблем; точно так же и теория уравнений нелинейных может, как я полагаю, достигнуть наибольших успехов, если внимание наше со всею тщательностью, с учетом всех побочных условий, направится к специальным проблемам физического содержания. И в самом деле, решение совершенно специальной задачи, являющейся предметом настоящего сочинения, требует новых методов и понятий и приводит к результатам, которые, вероятно, будут играть известную роль и в задачах более общих.*

Б. Риман. О распространении волн конечной амплитуды. Геттинген, 1860 г.