Матричная теорема о деревьях

15.04.20
Лекция 10

G — граф

$V(G)$ - вершины

$E(G)$ - рёбра.

Остовное дерево: $G' \subset G$,

$V(G) = V(G')$

$E(G') \subset E(G)$

G' - дерево.

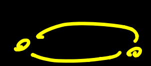
(G' связен и не имеет циклов $\Leftrightarrow$ $|V(G)| - 1 = |E(G')|$.

Вопрос: найти число остовных деревьев $\varkappa(G)$ данного графа G.

В прошлый раз: теор. Кэли:
в полном графе на p вершинах — p^{p-2} остовных дерева.

Сегодня: аналог. результат для любого G.

Соглашения:



можно

нельзя

$|V(G)| = p$

$|E(G)| = q$.

Данные о примыкании вершин и рёбер:

1) Матрица смежности (adjacency matrix): $A(G) = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & a_{ij} \\ a_{ij} & \ddots & 0 \end{pmatrix}$.

$\underset{i}{\bullet} \overset{a_{ij} \text{ рёбер}}{=\!=\!=} \underset{j}{\bullet}$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$.

$A(G) \in Mat_{p\times p}(\mathbb{Z})$.

2) Матрица инцидентности

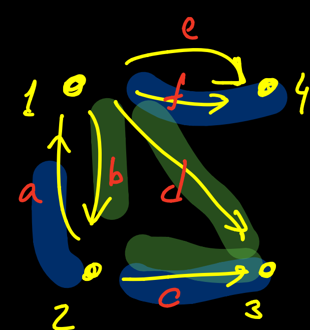
Пусть G - ориентированный граф.

$M(G) \in Mat(p\times q, \mathbb{Z})$

$$M(G)_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ начин. в } v_i \\ 1 & \text{если } e_j \text{ заканчивается в } v_i \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример:

$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



3) Матрица Лапласа: забудем про стрелки

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \underset{i}{\bullet} \overset{a_{ij}}{=\!=\!=} \underset{j}{\bullet}, \quad i \neq j \\ \deg v_i, & i = j \end{cases}$$

$$L(G) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\det L(G) = 0$: сумма всех строк равна $(0 \dots 0)$.

<u>Лемма.</u> (а) $L = M \cdot M^t$.

(б) Пусть граф <u>регулярен</u>: все вершины имеют степень d. Тогда

$$L(G) = dI - A(G).$$

Если $\lambda_1, \dots \lambda_p$ – собств. значения $A(G)$, то собств. значения $L(G)$ равны $d-\lambda_1, d-\lambda_2, \dots d-\lambda_p$.

<u>Д-во:</u> (а) Пусть v_i, v_j – вершины.

$$(MM^t)_{ij} = \sum_{k \in E(G)} M_{ik} \cdot M_{jk}.$$

Пусть $i \neq j$. $\quad M_{ik} M_{jk} = \begin{cases} -1, & \overset{k}{\underset{i\quad j}{\circ\!-\!\!-\!\!-\circ}} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

$i = j$: $\quad M_{ik} M_{jk} = M_{ik}^2 = \begin{cases} 1, & \overset{k}{\underset{i}{\circ\!-\!\!-\!\!-}} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Предп., что G связен.

$M(G) \rightsquigarrow M_0(G)$ усечённая матрица инцидентности:

$M_0(G) = M$ без последней строки.

$M_0(G) \in Mat_{(p-1)\times q}(\mathbb{Z})$ $\qquad \pm 1, 0.$

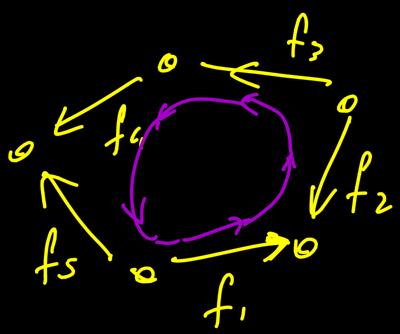
Предл. Пусть $S \subset E(G)$, $M_0[S]$ — соотв. подматрица размера $p-1$.

(i) Если S - остовное дерево, то $\det M_0[S] = \pm 1$.

(ii) В противном случае $\det M_0[S] = 0$.

Д-во. (ii) Если S - не остовное дерево, то рассм. цикл $R \subset S$

$f_1, f_2, f_3, \ldots f_r$.



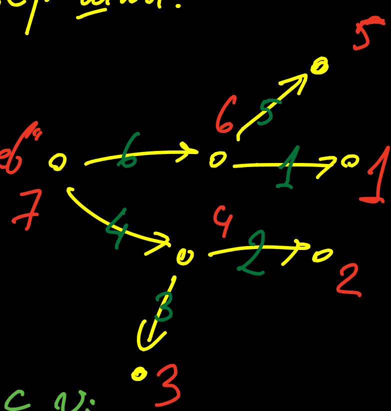
Сложим столбцы матр. $M_0[S]$ отв. входящим в цикл рёбрам,

[Пример: $f_1 - f_2 + f_3 + f_4 - f_5 = 0$].

(i) Пусть S – остовное дерево.

Пусть $u_1, u_2, \dots u_p$ – вершины.

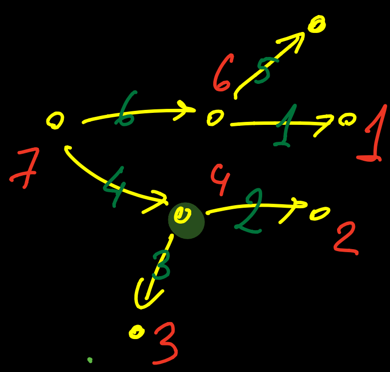
Пусть они занумерованы в порядке "опадающих листьев"



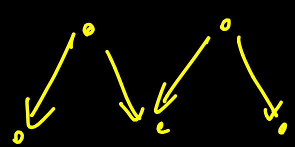
Перенумеруем ребра так, чтобы i-е ребро было единств. ребром, смежным с v_i в графе $G \setminus \{v_1, \dots v_{i-1}\}$.

Тогда $M_0(S)$ есть <u>нижнетреуг.</u> матрица с 1 на главной диагонали.

Значит, до перест. строк и столбцов $\det M_0[S] = \pm 1$.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & -1 & -1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Теорема. (матричная теор. о деревьях).

Пусть G - связный граф без петель

$L = L(G)$ - его матрица Лапласа.

L_0 - L без последней строки и столбца.

Тогда $\det L_0(G) = \varkappa(G)$ есть число остовных деревьев.

Теорема (Binet-Cauchy)

$$\det AB = \sum_{S \subset \{1,\dots,n\},\ |S|=m} \det(A_{[m],S}) \cdot \det(B_{S,[m]}).$$

$$L = MM^t \qquad L_0 = M_0 M_0^t.$$

Д-во матричной теор о деревьях

$$\det L_0 = \det M_0 \cdot M_0^t = \sum_{S \subset E(G)} \det M_0[S] \cdot \det M_0^t[S].$$

$$= \sum_{S \subset E(G)} \det{}^2 M_0[S] = \sum_{S \subset E(G)} 1 = \varkappa(G).$$

S – остовное дерево G

$\blacksquare$

Лемма из лин. алгебры. Пусть $M \in Mat(p \times p)$ причем $\sum_i M_{ij} = \sum_j M_{ij} = 0$. Пусть M_0 получ. из M выбрасыванием последних строки и столбца. Тогда

$$\chi_M(t) = \det(M - tI) = (-1)^p t^p + \ldots - p \cdot \det M_0 t.$$

Набросок д-ва. Своб. член $\chi_M(t)$ равен $\det M = 0$.

$$M - tI = \begin{pmatrix} m_{11}-t & m_{12} & & \vdots \\ m_{21} & m_{22}-t & & \vdots \\ \vdots & & & \\ m_{p1} & m_{p2} & \ldots & m_{pp}-t \end{pmatrix}.$$

Прибавим строки с 1-й по $(p-1)$-ю к p-й:

Получим

$$\det\begin{pmatrix} & M_0 - tI & & \begin{matrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline -t & -t & -t & -t \end{pmatrix} = -t\cdot\det\begin{pmatrix} \overset{N}{M_0 - tI} & \begin{matrix} m_{1p} \\ \vdots \\ m_{p-1\,p} \end{matrix} \\ \hline 1 \;\ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем $\det(M_0 - tI)_{t=0} = \det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2p} \\ - & - & - & - \\ 1 & \ldots & & 1 \end{pmatrix} =$

прибавим к посл. столбцу все предыд.:

$$= \det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1\,p-1} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & & 0 \\ & \ldots & & & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & p \end{pmatrix} = p\cdot\det M_0.$$

$$\chi_M(t) = \ldots - p\cdot\det M_0\cdot t.$$

Сл-е: Пусть G - связный граф без петель.

Пусть собств значения $L(G)$ равны

$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{p-1}, \mu_p = 0.$

Тогда $\varkappa(G) = \frac{1}{p}\cdot\mu_1\ldots\mu_{p-1}.$

Д-во. $\chi_L(t) = \det(L - tI) =$

$$= (\mu_1 - t)(\mu_2 - t)\dots(\mu_{p-1} - t)\cdot(-t).$$

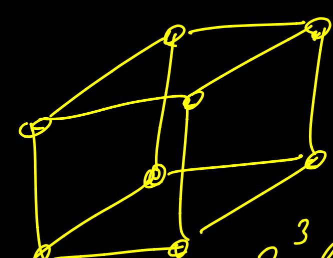
Поэтому $-\mu_1\mu_2\dots\mu_{p-1} = -p\cdot\det L_0 =$

$$= -p\cdot\varkappa(G).$$

Задача попроще: вывести теор. Кэли из матр. теоремы о деревьях.

Набросок решения: G – полный граф.

$$\det\begin{pmatrix} p-1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ -1 & p-1 & -1 & \dots & \\ -1 & -1 & \ddots & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & \dots & & & p-1 \end{pmatrix} = ?$$



2^3 верш.

Задача посложнее: пусть C_n – рег. степ. 3
– n-мерный куб. (на 2^n вершинах).

$$\varkappa(C_n) = ?$$