Определители в комбинаторике

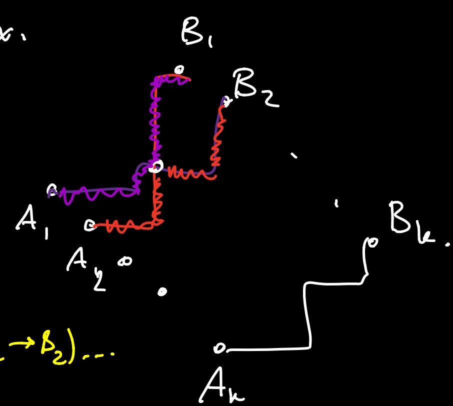
Лекция 8

01.04.20.

#stayhomeandstudy

В прошлый раз: лемма Линдстрёма-Гесселя-Вьенно о непересекающихся путях.

$P(A_i \to B_j)$ – число путей из A_i в B_j.



Теор. (LGV) Число наборов непересекающихся путей $(A_1 \to B_1), (A_2 \to B_2) \ldots$ $\ldots (A_k \to B_k)$ равняется

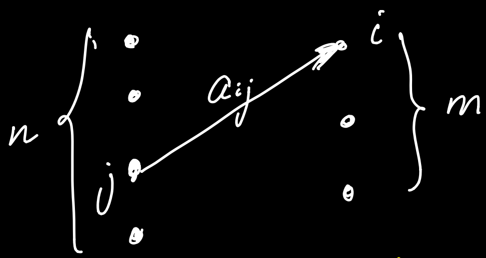
$$P_{nc}(A_i \to B_i) = \det \left| P(A_i \to B_j) \right|,$$

при условии, что всякий набор непересек. путей отвечает тождественной перестановке. $(\,A_1 \to B_1,\ A_2 \to B_2, \ldots)$

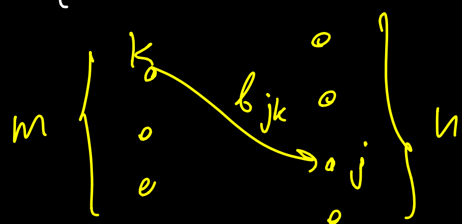
Вопрос: а что происходит, если бывают наборы непересек. путей, соед. точки в "неправильном" порядке?

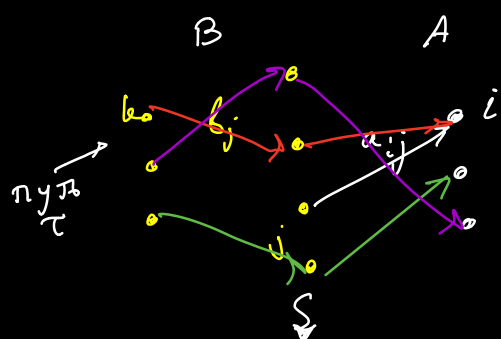
Линейная алгебра.

$A \in Mat(m \times n)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$



$B \in Mat(n \times m).$





AB

$\Uparrow$

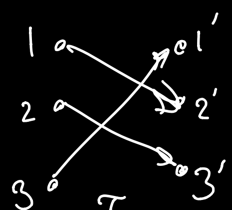
$Mat(m \times m).$

$a_{ij} b_{\cdot k} = wt\,\tau$

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{\tau\text{-путь } k \to i} wt(\tau)$$

Если матрица A квадратная: $A \in Mat(m \times m)$.

$$\det A = \sum_{w \in S_m} (-1)^{w} \cdot \prod a_{i,w(i)} = \sum_{\substack{\tau\text{ - набор путей} \\ \{1,..m\} \to \{1,..m\}}} wt(\tau).$$



$a_{21} \cdot a_{32}\, a_{13} \cdot (-1)^{w}$

$\parallel$

$wt(\tau)$

"partition function"

$\parallel$

"статсумма".

<u>Цель</u>: вычислить $\det(A\cdot B)$.

$$\det(AB) = \sum_{w\in S_m} (-1)^w \prod_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{j w(j)}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{\tau\text{ - набор}\\ \text{путей } \{1,..m\}\to\{1,..m\}}} wt(\tau) = \sum_{\substack{S\subset\{1,..n\}\\ |S|=m}} wt(\tau_1)\cdot wt(\tau_2) =$$

$\tau_1 : \{1,..m\}\to S$

$\tau_2 : S \to \{1,..m\}$.

<u>Вопрос</u>: а что, если $m>n$? $\boxed{\det(AB)=0}$

Д-во: $\operatorname{rk} AB \le \operatorname{rk} A \le \min(m,n) = n$, т.е. у AB неполный ранг.

$$\sum_{\substack{S\subset\{1..n\}\\ |S|=m}} \Big(\sum_{\tau_1:\{1,..m\}\to S} wt\ \tau_1\Big)\cdot\Big(\sum_{\tau_2: S\to\{1..m\}} wt(\tau_2)\Big) = \sum_{\substack{S\subset\{1..n\}\\ |S|=m}} \det(A_{[m],S}) \times \det(B_{S,[m]}).$$

<u>Теорема</u> (Binet-Cauchy)

$$\det AB = \sum_{S\subset\{1,..n\},\ |S|=m} \det(A_{[m],S})\cdot\det(B_{S,[m]}).$$

<u>Следствие</u>: $m=n$: $\det AB = \det A\cdot\det B$.

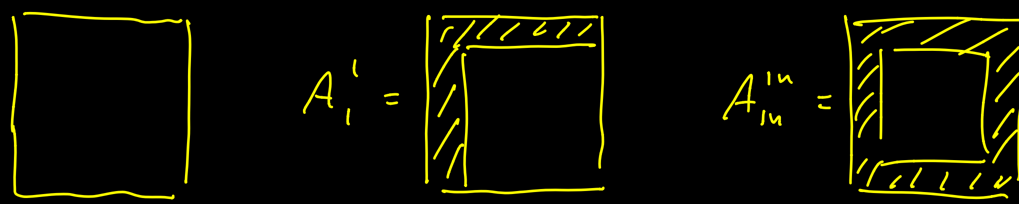
<u>Следствие</u>: $m=1$: $(a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} = a_1b_1+\dots+a_nb_n$.

<u>Упр</u>: $m=2$: "формула Бине". Выведите отсюда формулу Лагранжа:

$$\|a\|^2\cdot\|b\|^2 - (a,b)^2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_i & a_j\\ b_i & b_j\end{vmatrix}^2.$$

Конденсация Доджсона
(тождество Льюиса Кэррола) 1865

$A =$, $A_1^1 =$, $A_{1n}^{1n} =$

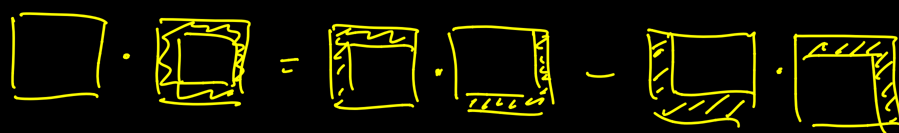


A_n^n, A_1^n, A_n^1 — миноры пор. $n-1$

минор пор. $n-2$.

Теор. $|A| \cdot |A_{1n}^{1n}| = |A_1^1| \cdot |A_n^n| - |A_1^n| \cdot |A_n^1|$.

(тождество Льюиса Кэррола).



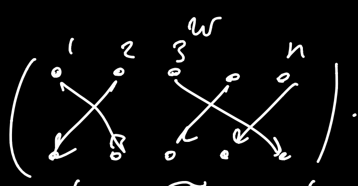
Частный случай: $n=2$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot 1 = d \cdot a - b \cdot c \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(Desnanot - Jacobi identity)

Д-во. (D. Zeilberger, '94).

$$\det A = \sum (-1)^w a_{i w(i)} = \sum wt\ \tau$$

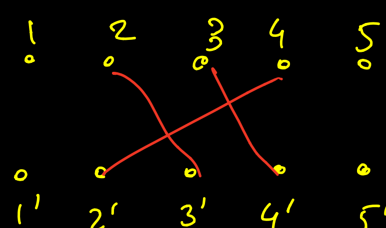


$\tau : \{1..n\} \to \{1'..n'\}$

$$wt\ \tau = (-1)^\tau \cdot a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)}.$$

$$|A_{1n}^{1n}| = \sum wt\ \sigma$$

$\sigma : \{2,..n-1\} \to \{2'..(n-1)'\}$

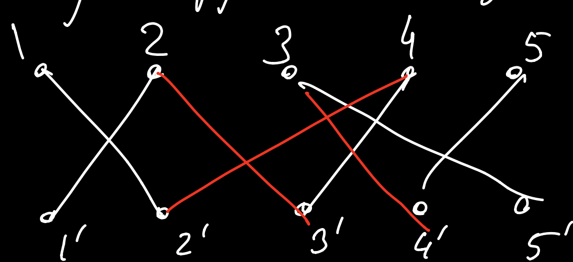


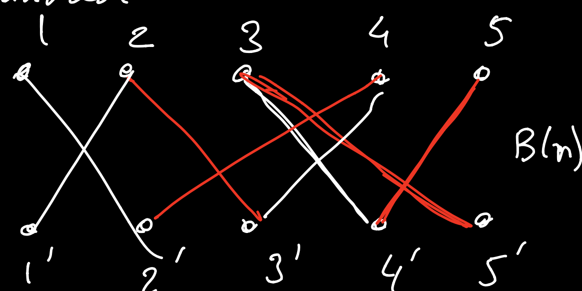
$$LHS = \sum_{(\tau,\sigma)\in A(n)} wt(\tau,\sigma) \qquad wt(\tau,\sigma) = wt\,\tau \cdot wt\,\sigma.$$

$A(n)$: мн-во пар: $\tau: \{1 .. n\} \to \{1' ... n'\}$

$\sigma: \{2, .. n-1\} \to \{2' .. (n-1)'\}$

Суммируем по всевозм. картинкам





$B(n)$: мн-во пар: $\tau: \{1, ... n-1\} \to \{1' ... n-1'\}$

$\sigma: \{2, ... n\} \to \{2' ... n'\}$.

$wt(\tau,\sigma) = wt\,\tau \cdot wt\,\sigma$.

$C(n)$ $\qquad \tau: \{2, .. n\} \to \{1', ... (n-1)'\}$

$wt(\tau,\sigma) = -wt\,\tau \cdot wt\,\sigma \qquad \sigma\ \{1, ... n-1\} \to \{2' ... n'\}$

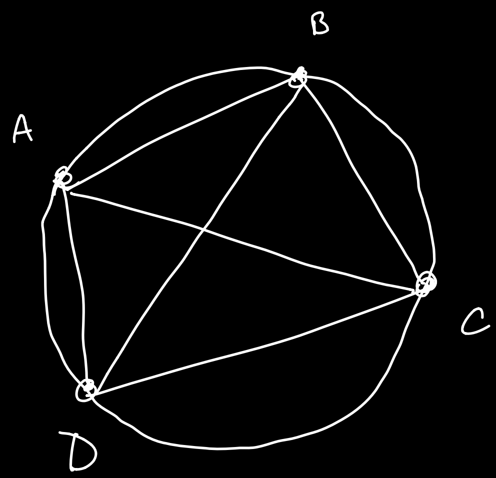
$$RHS = \sum_{(\tau,\sigma)\in B(n)\cup C(n)} wt(\tau,\sigma).$$

Упр.

$T: A(n) \to B(n) \cup C(n)$. – отобр., сохр вес конфигурации

- T – не наложение: есть "плохие" конф. в $B(n)\cup C(n)$, к-рые не получ. из $A(n)$.
- Зато есть биекция S на мн-ве "плохих": $B(n)\setminus \mathrm{Im}\,T \xrightarrow{S} C(n)\setminus \mathrm{Im}\,T$.

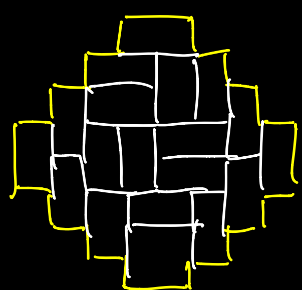
сохр. вес: $wt(\tau,\sigma) = -wt\,S(\tau,\sigma)$. Упр. Построить S.



Теор. Птолемея:

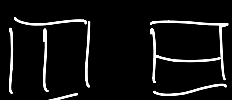
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Ацтекский бриллиант:



AD(4)

Задача: сколькими способами AD(n) можно разбить на доминошки?

AD(1)  $2 = 2^1$

AD(2) $8 = 2^3$

AD(3) $64 = 2^6$

AD(4) $1024 = 2^{10}$

Теорема. $AD(n) =$

$$= 2^{\binom{n+1}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$