Экзамен

Задача 1. Найдите производящую функцию (от двух переменных) количеств $D(m,n)$ путей короля из левой нижней клетки доски $(m+1)\times(n+1)$ в правую верхнюю (каждый ход — вправо, вверх, или вправо-вверх).

Задача 2. Найдите определитель матрицы $a_{ij} = \binom{n-i+2}{i-j+1}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$.

Задача 3. Докажите, что функция

$$F(a,b;t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ab^n t^n}{(1-at)(1-at^2)\ldots(1-at^n)}$$

симметрична по a и b.

Задача 4. Пусть G — это 1-остов гипероктаэдра (кокуба), т.е. граф, $2n$ вершин которого соответствуют концам векторов $\pm e_i \in \mathbb{R}^n$ (где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис), а две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно $\sqrt{2}$.

Найдите а) собственные значения матрицы Лапласа для графа G; б) число его остовных деревьев.

Задача 5. Докажите, что $\sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^3)\ldots(1-q^{2n-1})$.

Задача 6. Пусть T_n — такой многочлен, что $(\operatorname{tg} x)^{(n)} = T_n(\operatorname{tg} x)$.

а) Докажите, что $T_n(1)$ есть количество «$\pm$-змей длины n» — таких последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$, что $x_1 < x_2 > x_3 < \ldots \lesseqgtr x_n$ и $\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \{1, \ldots, n\}$.

б) Дайте комбинаторную интерпретацию для коэффициента при x^k многочлена $T_n(x)$ в терминах $\pm$-змей специального вида.

Работу в виде **одного pdf**-файла (желательно набранного в (La)TeX'е, но принимаются и собранные из *разборчивых* сканов/фотографий рукописных листов) присылайте на адрес GRIGORY.MERZON+COMBI@GMAIL.COM **не позднее 20:59 5 мая**.

Обсуждение задач экзамена — 6 мая.

Успехов!