Определители в комбинаторике (часть 2)

Задача 8.1. Вычислите определитель трехдиагональной матрицы: на главной диагонали 1, непосредственно над ней и под ней $\sqrt{-1}$. (Приветствуется максимально комбинаторное объяснение.)

Задача 8.2. Сопоставим двудольному графу матрицу смежности A, где a_{ij} есть количество ребер из i-й черной вершины в j-ю белую. Докажите, что *перманент* этой матрицы ($\sum_\sigma \prod_i a_{i\sigma(i)}$) равен количеству совершенных паросочетаний в графе.

Задача 8.3*. а) Сопоставим клетчатому многоугольнику, в котором поровну черных и белых клеток, матрицу, строки и столбцы которой соответствуют черным и белым клеткам, a_{ij} есть 1, если соответствующие клетки стоят рядом в одной строке, $\sqrt{-1}$, если рядом в одном столбце, 0 иначе. Докажите, что определитель этой матрицы равен количеству разбиений этой фигуры на доминошки.

б) Объясните, как модифицировать матрицу смежности произвольного *планарного* двудольного графа, чтобы ее определитель вычислял количество совершенных паросочетаний в этом графе.

▷ Далее ∂ — отображение [ребро] $\mapsto$ [конец] $-$ [начало] из векторного пространства, натянутого на ребра, в пространство, натянутое на вершины данного (ориентированного) графа; ∂^* — двойственное отображение в противоположную сторону. Матричная теорема о деревьях: если вычеркнуть из *матрицы Лапласа* $\Delta := \partial\partial^*$ i-ю строку и i-й столбец, после чего посчитать определитель, то с точностью до знака получится количество остовных деревьев графа.

Задача 8.4. Чему равен определитель матрицы Лапласа? Как количество остовных деревьев графа выражается через собственные значения его матрицы Лапласа?

Задача 8.5. Найдите собственные вектора и собственные значения матрицы Лапласа для а) полного графа на n вершинах; б) графа n-мерного куба и найдите количество остовных деревьев в этом графе.

▷ Будем рассматривать граф Γ как электрическую цепь. Сопротивление каждого ребра будем считать равным 1, источник питания подключим к вершинам a и b и подадим такое напряжение, чтобы ток был равен 1. Напомним, что *законы Кирхгофа* можно записать в виде

$$\begin{cases} \partial j = \delta_b - \delta_a, \\ \partial^* \phi = -j, \end{cases}$$

где j — токи через ребра, а ϕ — потенциалы вершин.

Задача 8.6. Докажите теорему Кирхгофа: ток через ребро ab равен доле остовных деревьев, содержащих это ребро. (Указание: для решения линейной системы можно воспользоваться правилом Крамера.)